R2 - Integralregning

Løsningsskisser

Del 1 - Uten hjelpemidler (lommeregner ok)

Oppgave 1

Regn ut integralene:

a) $\int xe^x dx$ b) $\int 4x\ln(x)dx$ c) $\int \frac{1}{x^2-x}dx$ d) $\int \frac{1}{e^x-1}dx$

a) Delvis integrasjon, med $u' = e^x$ og $v = x$:
$\int xe^x dx = xe^x - \int 1e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$

b) Delvis med $v = \ln x$ og $u' = 4x$:
$\int 4x\ln(x)dx = 2x^2\ln x - \int 2x^2\frac{1}{x}dx = 2x^2\ln x - \int 2xdx =$
$2x^2\ln x - x^2 + C = x^2(2\ln x - 1) + C$

Eller skrive om og ta variabelskifte:
$\int 4x\ln(x)dx = \int(2x)\ln(x^2)dx = \int u'\ln(u)dx = \int \ln(u)du = u\ln u - u + C =$
$x^2\ln x^2 - x^2 + C = x^2 2\ln x - x^2 + C = x^2(2\ln x - 1) + C$

(Husk regel: $\int \ln x dx = x\ln x - x + C$)

c) Delbrøkoppspalting: $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$ gir: $1 = A(x-1) + Bx$ og:
$A = -1,\ B = 1$

$\int \frac{1}{x^2-x}dx = \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{x}dx = \ln|x-1| - \ln|x| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$

d) Variabelskifte med: $u = e^x$ og $\frac{du}{dx} = e^x$, som gir: $dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{e^x}$
$\int \frac{1}{e^x-1}dx = \int \frac{1}{u-1}\frac{du}{e^x}$ Her har vi e^x som må bort, så vi bruker $u = e^x$:
$\int \frac{1}{u-1}\frac{du}{e^x} = \int \frac{1}{(u-1)u}du$
Samme delbrøkoppspalting som i c) gir:
$\int \frac{1}{u-1}du - \int \frac{1}{u}du = \ln\left|\frac{u-1}{u}\right| + C = \ln\frac{|e^x-1|}{e^x} + C$

Oppgave 2

Gitt funksjonen $f(x) = \sqrt{x+3}$.

a) Regn ut arealet avgrenset av $f(x)$ og koordinataksene.

b) Regn ut volumet av omdreiningslegemet som fremkommer ved å dreie grafen til $f(x)$ 360° om x-aksen fra $x = 0$ til $x = 5$.

a) Vi ser at $f(-3) = 0$ og at $f(0) = \sqrt{3}$. $f(x)$ er funksjonen $\sqrt{x}$ forskjøvet 3 enheter til venstre.

$$\text{Arealet blir derfor: } \int_{-3}^{0} \sqrt{x+3}\,dx = \int_{-3}^{0} (x+3)^{\frac{1}{2}}dx = {}_{-3}^{0}\left[\frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(3^{\frac{3}{2}}) - 0 = \frac{2}{3}\sqrt{3}^{\,3} = \frac{2}{3}3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{b) Volumet: } \pi\int_{0}^{5} f^2(x)dx = \pi\int_{0}^{5}(x+3)dx = \pi\left({}_{0}^{5}\left[\frac{x^2}{2}+3x\right]\right) = \pi\left(\frac{25}{2}+15-0\right) = \frac{55}{2}\pi \approx 86.4$$

Oppgave 3

Gitt funksjonen $f(x) = e^{2-\frac{1}{x}}$.

a) Vis at $f'(x) = e^2\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$.

b) Regn ut det bestemte integralet $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx$.

a) Kjerneregel:

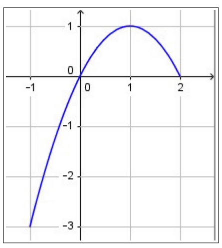
$f(x) = e^u, u = 2 - \frac{1}{x}$ gir:

$$f'(x) = e^u \cdot (0 - (-\frac{1}{x^2})) = e^{2-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2} = e^2e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x2} = e^2\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \; QED$$

$$\text{b) } \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f'(x)}{e^2}dx = \frac{1}{e^2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} f'(x)dx = \frac{1}{e^2}\; {}_{\frac{1}{2}}^{1}[f(x)] = \frac{1}{e^2}(f(1) - f(\tfrac{1}{2})) = \frac{1}{e^2}(e^{2-\frac{1}{1}} - e^{2-\frac{1}{\frac{1}{2}}}) = \frac{1}{e^2}(e^1 - e^0) = \frac{e-1}{e^2}$$

Oppgave 4

Figuren viser grafen til en funksjon $g(x)$ med definisjonsmengde $D_g = [-1,2]$.
Om en funksjon $f(x)$ vet vi at $g'(x) = f(x)$.



a) Finn integralet $\int_{-1}^{2} f(x)dx$

b) Bestem a og b, innenfor D_g, slik at integralet $\int_{a}^{b} f(x)dx$ blir størst mulig.

c) Finn arealet avgrenset av $f(x)$, x-aksen og linjene $x = -1$ og $x = 2$.

a) Fundamentalteoremet gir: $\int f(x)dx = \int g'(x)dx = g(x) + C$

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = g(2) - g(-1) = 0 - (-3) = 3$$

b) $\int_{a}^{b} f(x)dx = g(b) - g(a)$ blir størst når $b = 1$ og $a = -1$

$(g(1) - g(-1) = 1 - (-3) = 4)$

c) Vi ser at $g'(1) = f(1) = 0$, da dette er et ekstremalpunkt for $g(x)$.
Da $g'(x) > 0$ for $x < 1$ og $g'(x) < 0$ for $x > 1$ vet vi at $f(x)$ er over x-aksen for $x < 1$, skjærer x-aksen for $x = 1$ og er under x-aksen for $x > 1$.

Det avgrensede arealet må derfor regnes ut som:

$$A = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \left|\int_{1}^{2} f(x)dx\right| = g(1) - g(-1) + |g(2) - g(1)| =$$
$$1 - (-3) + |0 - 1| = 4 + 1 = 5$$

Del 2 - Med hjelpemidler (pc og bok)

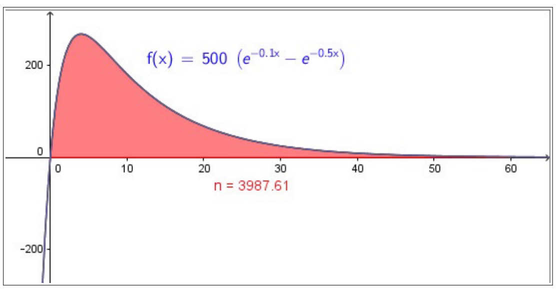
Oppgave 5

Funksjonen $f(x) = 500(e^{-0.1x} - e^{-0.5x})$ [syke/døgn], $x \in [0, 60]$ [døgn]
viser hvordan en influensaepidemi utviklet seg i Lilleby i løpet av 60 døgn.
$f(x)$ er antall personer som blir smittet og syke per døgn, som funksjon av antall døgn etter epidemiens start. Hvor mange blir syke i disse 60 døgnene?

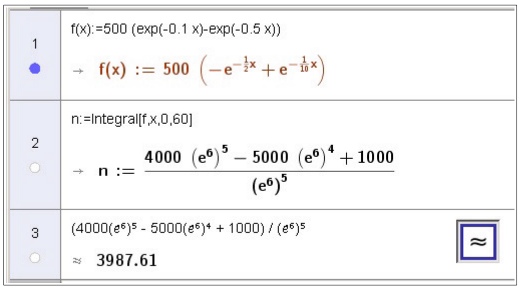
I numerisk/grafisk del av GeoGebra:

f(x):=500 (exp(-0.1 x-exp(-0.5 x))
n:=Integral[f,0,60]

gir antall syke: $n \approx 3990$



Tilsvarende i CAS:

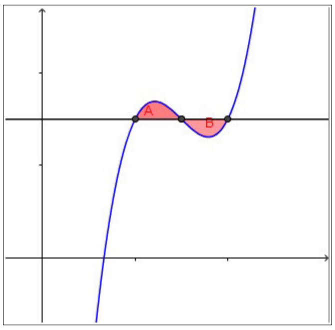


(Tar litt lengre tid å gjøre dette manuelt, så man bør derfor ikke bruke tid på dette på eksamen, men for eksemplets skyld:

$$n = 500\int_0^{60}(e^{-\frac{x}{10}} - e^{-\frac{x}{2}})dx = 500\left[\frac{e^{-\frac{x}{10}}}{-\frac{1}{10}} - \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^{60} = 500\left[2e^{-\frac{x}{2}} - 10e^{-\frac{x}{10}}\right]_0^{60} =$$
$$500(2e^{-30} - 10e^{-6} - (2e^0 - 10e^0)) = 500(2e^{-30} - 10e^{-6} - 2 + 10) \approx 3990$$)

Oppgave 6

Vi har en tredjegradsfunksjon, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, hvor vi forutsetter at en vannrett linje l gjennom vendepunktet skjærer grafen til $f(x)$ i to andre punkter. Da vil linjen l og funksjonen $f(x)$ avgrense to arealer, omtrent slik:



Bruk CAS til å vise at disse to arealene er like.

1	f(x):=a x^3+b x^2+c x+d $\rightarrow\ \mathbf{f(x)\ :=\ a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d}$
2	Vendepunkt når f''(x)=0:
3	f''(x)=0 Løs: $\left\{\mathbf{x=-\frac{b}{3\,a}}\right\}$
4	x_v:=HøyreSide[$3,1] $\rightarrow\ \mathbf{x_v\ :=\ -\frac{b}{3\,a}}$
5	l(x): Konstant lik y-verdien til vendepunktet, det vil si f(x_v):
6	l(x):=f(x_v) $\rightarrow\ \mathbf{l(x)\ :=\ \frac{2\,b^3+27\,a^2\,d-9\,a\,b\,c}{27\,a^2}}$
7	Finner skjæringspunktene (v_p allerede kjent):
8	f(x)=l(x) Løs: $\left\{\mathbf{x=\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{-3\,a\,c+b^2}\ \lvert a\rvert-a\,b}{3\,a^2},x=\frac{-\sqrt{3}\,\sqrt{-3\,a\,c+b^2}\ \lvert a\rvert-a\,b}{3\,a^2},x=-\frac{b}{3\,a}}\right\}$
9	Definerer x-koordinatene til de andre skjæringspunktene:
10	x_1:=HøyreSide[$8,2] $\rightarrow\ \mathbf{x_1\ :=\ \frac{-\sqrt{3}\,\sqrt{-3\,a\,c+b^2}\ \lvert a\rvert-a\,b}{3\,a^2}}$
11	x_2:=HøyreSide[$8,1] $\rightarrow\ \mathbf{x_2\ :=\ \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{-3\,a\,c+b^2}\ \lvert a\rvert-a\,b}{3\,a^2}}$
12	Finner de to arealene (A og B):
13	A:=IntegralMellom[f, l, x_1, x_v] $\rightarrow\ \mathbf{A\ :=\ \frac{9\,a^2\,c^2-6\,a\,b^2\,c+b^4}{36\,a^3}}$
14	B:=IntegralMellom[l, f, x_v, x_2] $\rightarrow\ \mathbf{B\ :=\ \frac{9\,a^2\,c^2-6\,a\,b^2\,c+b^4}{36\,a^3}}$
15	): Ser at A=B