R2 - K 5.1-5.4 Integraler

Løsningsskisser

I

Finn integralene:

a) $\int \cos(3x+1)dx$ b) $\int x\ln(x)dx$ c) $\int x\ln(x^2)dx$

d) $\int \frac{x+1}{x^2-x}dx$ e) $\int \frac{x^2+1}{x^2-x}dx$

Husk at du alltid kan kontrollere integrasjoner ved å derivere tilbake til utgangspunktet!

a) Kjerneregel eller "hurtigformelen" $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(x) + C$ gir:

$$\int \cos(3x+1)dx = \frac{1}{3}\sin(3x+1) + C$$

b) Delvis integrasjon, $\ln x$ er kandidat for v, da $v' = \frac{1}{x}$.

$u' = x \Rightarrow u = \frac{x^2}{2}$

$$\int x\ln(x)dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx =$$
$$\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$$

c) x er omtrent den deriverte av x^2, så vi velger kjerne $u = x^2$, som gir:

$\frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}$ og innsatt:

$$\int x\ln(x^2)dx = \int x\ln u\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int \ln u du = \frac{1}{2}(u\ln u - u) + C =$$ (Se formelark!)

$$\frac{1}{2}x^2\ln x^2 - \frac{1}{2}x^2 + C = \frac{x^2}{2}2\ln x - \frac{1}{2}x^2 + C = x^2(\ln x - \frac{1}{2}) + C$$

d) En grad lavere i teller, så det legges opp til delbrøksoppspaltning:

$$\frac{x+1}{x^2-x} = \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$
$$HS = \frac{A(x-1)}{x(x-1)} + \frac{Bx}{(x-1)x} = \frac{Ax-A+Bx}{x(x-1)} = \frac{(A+B)x-A}{x(x-1)}$$
$VS = HS$ gir: $A+B = 1 \wedge -A = 1 \Leftrightarrow A = -1 \wedge B = 2$

$$\int \frac{x+1}{x^2-x}dx = \int \frac{-1}{x}dx + \int \frac{2}{x-1}dx = -\ln|x| + 2\ln|x-1| + C =$$
$$\ln(x-1)^2 - \ln|x| + C = \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} + C$$

e) Delbrøksoppspaltning igjen, men samme grad i teller og nevner, så vi må først polynomdividere:

$\frac{x^2+1}{x^2-x} = x^2+1 : x^2-x = 1 + \frac{x+1}{x^2-x}$ (Siste ledd som i d) !)

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-x}dx = \int 1dx + \int \frac{x+1}{x^2-x}dx = x + \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} + C$$

II

Gitt funksjonen $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$.

a) Vis at $f'(x) = \frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$.

b) Finn ved regning det bestemte integralet $\int_1^2 \frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}dx$.

a) Brøkregel, men først kjerneregel på teller:

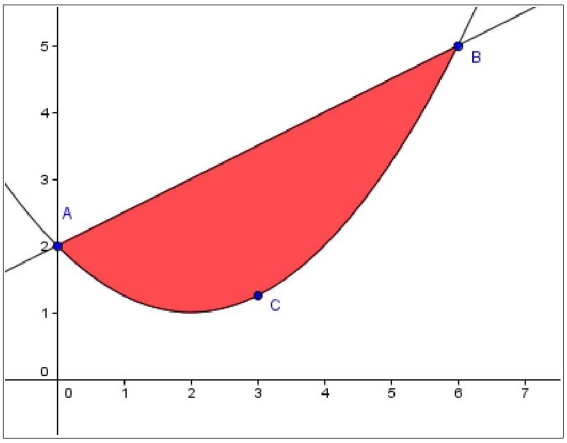
$$(\ln x)^2 = u^2, u = \ln x \Rightarrow ((\ln x)^2)' = 2u\frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2\ln x}{x}x - (\ln x)^2 1}{x^2} = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2} \; QED$$

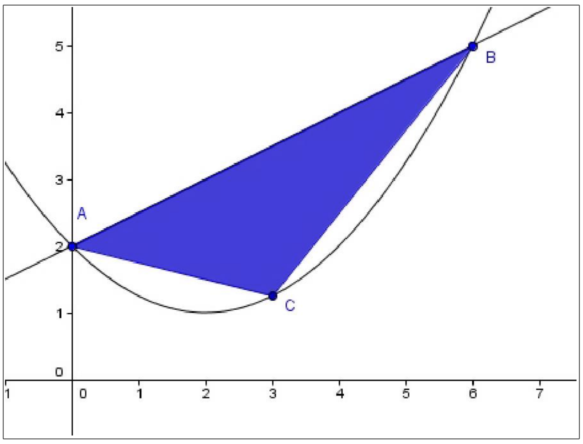
b) $\int_1^2 \frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}dx = \int_1^2 f'(x)dx = [f(x)]_1^2 = \frac{(\ln 2)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{1} =$
$\frac{(\ln 2)^2}{2} - \frac{(0)^2}{1} = \frac{(\ln 2)^2}{2} \approx 0.240$

III

Arkimedes beviste at arealet av et såkalt parabelsegment, farvet rødt i figur 1, var $\frac{4}{3}$ av arealet til en trekant, farvet blått i figur 2, med korden som en av sidene og der punktet C ligger midt mellom A og B i den forstand at x –koordinaten til C ligger midt mellom x –koordinatene til A og B.



Figur 1.



Figur 2.

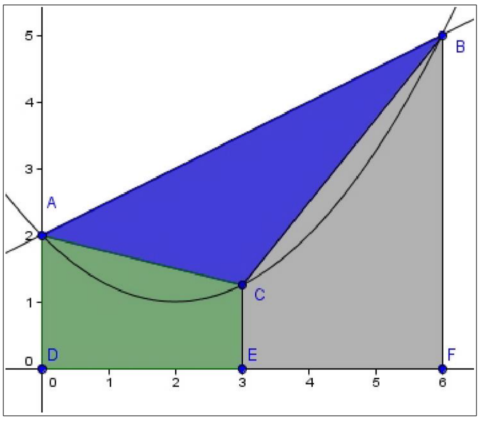
Gitt:
Parabel: $f(x) = \frac{x^2}{4} - x + 2$ Linje gjennom A og B: $g(x) = \frac{x}{2} + 2$
Punktene: $A = (0,2)$, $B = (6,5)$ og $C = (3, \frac{5}{4})$

a) Regn ut arealet av den blå trekanten. (Trapes-beregninger antagelig raskere enn vektorer.)

b) Regn ut arealet av det røde parabelsegmentet med integralregning.

c) Kommenter resultatet.

a) Vi ser på arealene av trapesene i figuren:



$ABC = DFBA - DECA - EFBC = \frac{(DA+FB)DF}{2} - \frac{(DA+EC)DE}{2} - \frac{(EC+FB)EF}{2} =$
$\frac{(2+5)6}{2} - \frac{(2+\frac{5}{4})3}{2} - \frac{(\frac{5}{4}+5)3}{2} = 21 - \frac{39}{8} - \frac{75}{8} = 21 - \frac{114}{8} = 21 - \frac{57}{4} = \frac{27}{4}$

(Kan selvfølgelig også bruke vektorer: $ABC = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - (\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})^2}$
hvor $\overrightarrow{AB} = [6,3]$ og $\overrightarrow{AC} = [3,-\frac{3}{4}]$:
$ABC = \frac{1}{2}\sqrt{45\cdot\frac{153}{16} - (18 - \frac{9}{4})^2} = \frac{27}{4} = 6.75)$

b) $S = \int_0^6 (g(x) - f(x))dx = \int_0^6 (\frac{x}{2} + 2 - (\frac{x^2}{4} - x + 2))dx =$
$\int_0^6 (-\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2})dx = \left[-\frac{x^3}{12} + \frac{3x^2}{4}\right]_0^6 =$
$-18 + 27 = 9$

c) Arkimedes sier at $S = \frac{4}{3}ABC = \frac{4}{3}\cdot\frac{27}{4} = 9$, så Arkimedes hadde selvfølgelig rett.

IV

Strømforbruket til Ernst Ferkenberg varierer endel gjennom et døgn.
Et døgn var den elektriske effekten gitt av:
$P(t) = 5 - 2\sin(\frac{\pi}{12}t)$ [kW], $\quad t \in [0,24]$ [timer]

Det samlede energiforbruket målt i kWh dette døgnet kan regnes ut som integralet
$E = \int_0^{24} P(t)dt$
Bruk lommeregneren til å finne forbruket.

$E = \int_0^{24}(5 - 2\sin(\frac{\pi}{12}t))dt$ blir på lommeregner:

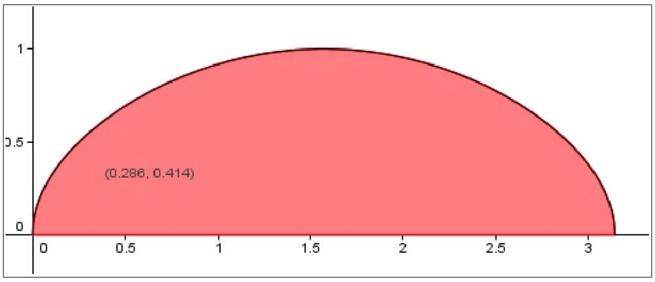
Y1=5-2*sin(π/12*X)
MATH,9:fnInt(Y1,X,0,24) gir: $\quad E \approx 120$ [kWh]
Husk MODE, Radian!

(Med regning:
$E = \left[5t + 2\frac{1}{\frac{\pi}{12}}\cos(\frac{\pi}{12}t)\right]_0^{24} = 5\cdot 24 + \frac{24}{\pi}\cos(2\pi) - (0 + \frac{24}{\pi}) =$
$120 + \frac{24}{\pi} - \frac{24}{\pi} = 120$ [kWh])
Kunne også sett at grafen ligger symmetrisk om $\bar{P} = 5$ (gjennomsnitt)

og regnet ut $E = \bar{P} \cdot t = 5 \cdot 24 = 120$ [kWh])

V

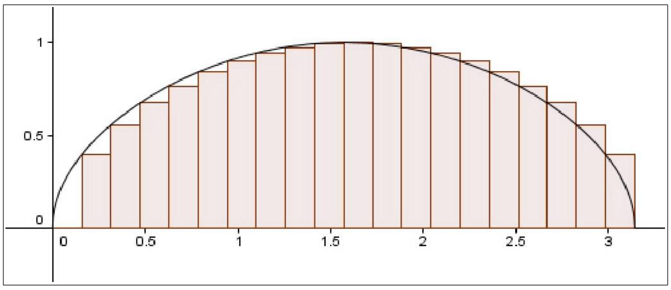
Vi skal prøve å finne arealet avgrenset av funksjonen $f(x) = \sqrt{\sin x}$ og x –aksen:



Figur 3.

a) Skriv opp integralet vi må regne ut.
b) Finn arealet ved hjelp av lommeregneren.
Dette er ikke så lett å regne ut, for å si det mildt, så vi skal finne en tilnærmet verdi ved hjelp av numerisk integrasjon med venstresummer:

$A = \sum_{i=1}^{20} f(x_i)\Delta x$ der $x_i = 0 + (i-1)\Delta x$, $\Delta x = \frac{\pi}{20}$



Figur 4.

c) Regn ut de tre første leddene i summen A.

d) Regn ut hele summen ved hjelp av lommeregneren. (Se formlene på utdelt formelark!)

a) $A = \int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin(x)}\, dx$

b) Y1=$\sqrt{\ }$(sin(X))
MATH,9:fnInt(Y1,X,0,π) gir: $A \approx 2.40$ (Etter en stund...)

c) $\Delta x = \frac{\pi}{20} \approx 0.1571$
$f(x_1)\Delta x = \sqrt{\sin(0)} \cdot 0.1571 = 0$
$f(x_2)\Delta x = \sqrt{\sin(0.1571)} \cdot 0.1571 \approx 0.0621$
$f(x_3)\Delta x = \sqrt{\sin(2 \cdot 0.1571)} \cdot 0.1571 \approx 0.0873$

d)
Y1=$\sqrt{\ }$(sin(X))
π →B
0→A
(B-A)/20→D
sum(seq(Y1*D,X,0,B-D,D)) gir: 2.31

seq(Y1*D,X,0,B-D,D)) gir hele remsen i spørsmål c)...

Beklager feil i formelark, skulle vært **sum**(**seq**(**Y1*D**,**X**,**0**,**B**-**D**,**D**))
som tilsvarer $\sum_{i=1}^{20} f(x_i)\Delta x$.