R2 - Kapittel 5 - Integraler

07.03.2013

Løsningsskisser

- *Kontroller alltid svaret på integral-oppgaver med derivasjon!*
- *Ta med mellomtrinnet* ${}_a^b[F(x)]$ *når du regner ut bestemte integraler, farlig å være for rask her.*
- *Vær litt nøye med notasjon og skill bestemte og ubestemte integraler*
- $\int \frac{1}{x-2}dx = \ln|x-2| + C$ *og lignende oppgaver løser vi med:* $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$
- *Obs:* $e^{x^2} = e^{(x^2)}$*, som er forskjellig fra* $(e^x)^2 = e^{x2} = e^{2x}$
- *Husk integrasjonskonstanten C, de straffer deg på eksamen, hvis du glemmer den!*

I

Løs integralene ved regning:

a) $\int x^3dx$ b) $\int(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx$ c) $\int xe^x dx$
d) $\int xe^{x^2}dx$ e) $\int \frac{x^2}{x^2-4}dx$ f) $\int \frac{x}{x-1}dx$

a) $\int x^3dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{1}{4}x^4 + C$

b) $\int(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx = \int(x^{-2} + x^{-\frac{1}{2}})dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{1}{x} + 2\sqrt{x} + C$

c) Delvis, med $u' = e^x$ og $v = x$:
$\int xe^xdx = xe^x - \int 1e^xdx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$

d) Variabelskifte: $u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}$
$\int xe^{x^2}dx = \int xe^u\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int e^udu = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

e) Delbrøkoppspalting, men først polynomdivisjon:
$x^2 : x^2 - 4 = 1 + \frac{4}{x^2-4}$
$I = \int \frac{x^2}{x^2-4}dx = \int(1 + \frac{4}{x^2-4})dx = \int dx + \int \frac{4}{(x-2)(x+2)}dx = x + \int \frac{4}{(x-2)(x+2)}dx$

Delbrøkoppspalting: $\frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \Leftrightarrow \frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{Ax+2A+Bx-2B}{(x-2)(x+2)} \Leftrightarrow$
$\frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A-2B}{(x-2)(x+2)} \Leftrightarrow A + B = 0 \wedge 2A - 2B = 4 \Leftrightarrow A = 1, B = -1$

$I = x + (\int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{1}{x+2}dx) = x + \ln|x-2| - \ln|x+2| + C =$
$x + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$

f) $\int \frac{x}{x-1}dx = \int(1 + \frac{1}{x-1})dx =$ (Polynomdivisjon.)
$x + \ln|x-1| + C$

Eller et lurt variabelskifte: $u = x - 1 \Rightarrow du = dx$

$\int \frac{x}{x-1} dx = \int \frac{x}{u} du = \int \frac{u+1}{u} du = \qquad (x = u + 1\ !)$
$\int (1 + \frac{1}{u}) du = u + \ln|u| + D = x - 1 + \ln|x - 1| + D =$
$x + \ln|x - 1| + (D + 1) = x + \ln|x - 1| + C$
(Går an å gjøre med delvis integrasjon, men blir mye og vanskelig regning.)

Trikset med å dividere antyder hvordan vi kan løse integraler av typen:
$\int \frac{ax+b}{cx+d} dx = \int (\frac{a}{c} + \frac{b - \frac{da}{c}}{cx+d}) dx = \frac{a}{c} x + (b - \frac{da}{c}) \frac{1}{c} \ln|cx + d| + C$

Verdt å merke seg!

II

Gitt funksjonen $f(x) = \sin(\frac{x}{x+1})$.

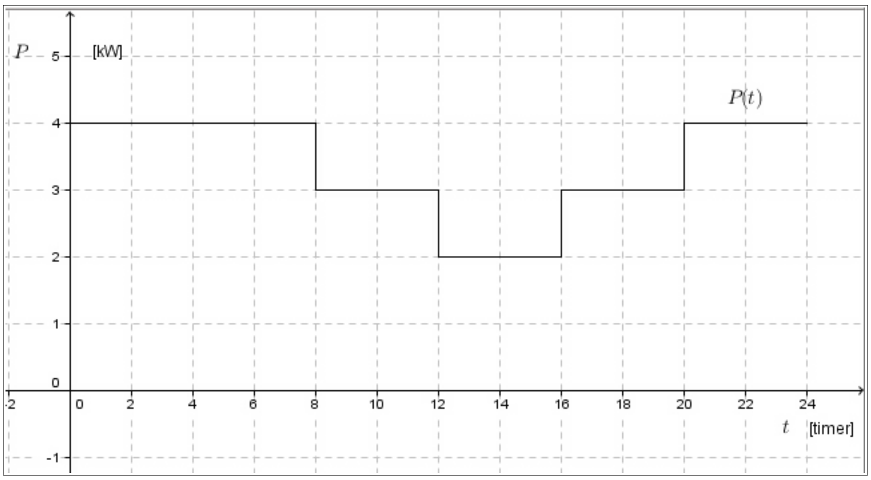
a) Vis ved regning at $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \cos \frac{x}{x+1}$

b) Regn ut $\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2} \cos \frac{x}{x+1} dx$

a) Kjerneregel: $f(x) = \sin(u), \qquad u = \frac{x}{x+1}$
$f'(x) = \cos(u) \cdot (\frac{x}{x+1})' = \cos u \cdot \frac{1(x+1) - x1}{(x+1)^2} = \qquad$ (Brøkregel på $(\frac{x}{x+1})'$)
$\cos(\frac{x}{x+1}) \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \qquad QED$

b) $\int f'(x) dx = f(x) + C$, så vi har:
$\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2} \cos \frac{x}{x+1} dx = \int_1^2 (\sin(\frac{x}{x+1})' dx =$
$\left[\sin(\frac{x}{x+1}) \right]_1^2 = \sin \frac{2}{3} - \sin \frac{1}{2} \approx 0.139$

III



Grafen viser hvordan uttak av effekt (energi/tidsenhet: $P = \frac{E}{t}$) varierer som funksjon av tiden i

løpet av et døgn i et hus.
a) Energiforbruket er gitt som arealet mellom grafen til $P(t)$ og tidsaksen t.
Finn energiforbruket i dette døgnet.

b) Gjennomsnittlig effekt i en tidsperiode $\langle 0, T\rangle$ er gitt ved $\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt$.
Finn gjennomsnittlig effekt i dette døgnet.

c) Hva koster energiforbruket dette døgnet hvis prisen per kWh er kr. 0,49?

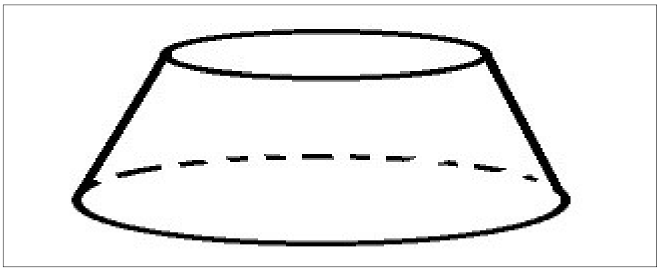
a) Energiforbruk:
Addisjon av rektangelarealer gir: (Tegn inn i figur!)
$E = \int_0^{24} P(t)dt = 8 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 80$ [kWh]

b) Gjennomsnittseffekt: $\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{1}{24}\int_0^{24} P(t)dt = \frac{1}{24}80 \approx 3.33$ [kW]

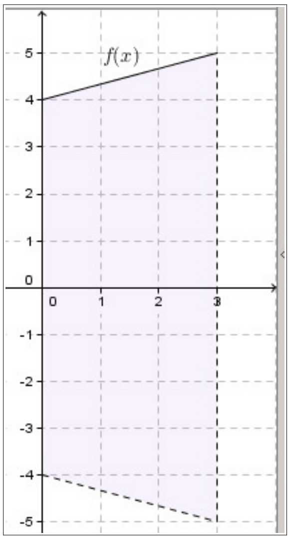
c) Pris: 80[kWh]$\cdot$0.49[kr/kWh]= 39.20 [kr]

IV

Sokkelen til en statue er formet som en avkortet kjegle, slik som vist i figuren:



Radien i grunnflaten er $R = 5$ meter og radien i toppflaten er $r = 4$ meter.
Høyden er $H = 3$ meter. Vi ønsker å finne dette volumet ved å rotere grafen til en funksjon $f(x)$ rundt x −aksen, slik som vist her:



a) Finn funksjonsuttrykket til $f(x)$.

b) Finn volumet av sokkelen.

c) Bevis at den generelle formelen for en avkortet kjegle er:

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

a) Rett linje: Stigningstall: $a = \frac{R-r}{H} = \frac{5-4}{3} = \frac{1}{3}$, $b = f(0) = 4$
): $f(x) = ax + b = \frac{1}{3}x + 4$

b) $V = \pi\int_0^3(\frac{1}{3}x+4)^2dx = \pi\int_0^3(\frac{1}{9}x^2 + \frac{8}{3}x + 16)dx =$
$\pi\ {}_0^3[\ \frac{1}{27}x^3 + \frac{8}{6}x^2 + 16x\ ] = \pi(\frac{27}{27} + \frac{8\cdot 9}{6} + 16\cdot 3 - 0) = 61\pi \approx 192$ [m^3]

c) Tilsvarende b), men med R, r og H istedenfor tall:
$f(x) = \frac{R-r}{H}x + r$

$V = \pi\int_0^H(\frac{R-r}{H}x + r)^2dx = \pi\int_0^H(\frac{(R-r)^2}{H^2}x^2 + \frac{2(R-r)}{H}xr + r^2)dx =$
$\pi\ {}_0^H[\frac{(R-r)^2}{H^2}\frac{x^3}{3} + \frac{2(R-r)r}{H}\frac{x^2}{2} + r^2x] =$
$\pi(\frac{(R-r)^2}{H^2}\frac{H^3}{3} + \frac{2(R-r)r}{H}\frac{H^2}{2} + r^2H - (0+0+0)) =$
$\pi((R-r)^2\frac{H}{3} + (R-r)rH + r^2H) =$
$\frac{\pi H}{3}((R-r)^2 + 3(R-r)r + 3r^2) =$
$\frac{\pi H}{3}(R^2 - 2Rr + r^2 + 3Rr - 3r^2 + 3r^2) =$
$\frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ *QED*

(Kontroll: $R = 5, r = 4$ og $h = 3$ gir:
$V = \frac{\pi 3}{3}(5^2 + 5\cdot 4 + 4^2) = 61\pi$
som er det samme som vi fikk i b) .)