R2 - Kapittel 5 - Integraler

Løsningsskisser

I

Finn integralene:

a) $\int (x^3 + \frac{2}{x^2} + \sqrt{x})\, dx$ b) $\int \frac{\cos x}{(\sin x - 1)^2}\, dx$ c) $\int x \ln x\, dx$

d) $\int \frac{x}{x^2-1}\, dx$ e) $\int \frac{1}{x^2-1}\, dx$ f) $\int \frac{x^2}{x^2-1}\, dx$

Kontrollstrategier: Alle svar kan deriveres for å sjekke om man kommer tilbake til den opprinnelige funksjonen!

a) $\int (x^3 + \frac{2}{x^2} + \sqrt{x})\, dx = \int (x^3 + 2x^{-2} + x^{\frac{1}{2}})dx = \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C =$
$\frac{x^4}{4} - \frac{2}{x} + \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 + C$

b) Variabelskifte: $u = \sin x - 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$
$\int \frac{\cos x}{(\sin x - 1)^2}\, dx = \int \frac{\cos x}{u^2} \frac{du}{\cos x} = \int u^{-2} du = \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{u} + C =$
$-\frac{1}{\sin x - 1} + C = \frac{1}{1 - \sin x} + C$

c) Delvis integrasjon med $u' = x \Rightarrow u = \frac{x^2}{2}$ og $v = \ln x \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$:
$\int x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx =$
$\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1) + C, \qquad x > 0$

(Kommentar: Her har jeg ikke skrevet $\ln|x|$, da det opprinnelige integralet ikke er definert for $x \leq 0$. Da er heller ikke svaret definert for annet enn $x > 0$, og da er tallverditegnet unødvendig, og direkte misvisende, da det antyder at vi kunne satt inn en negativ verdi for x.)

d) Variabelskifte: $u = x^2 - 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$:
$\int \frac{x}{x^2-1}\, dx = \int \frac{x}{u} \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + C$

(Går også med delbrøkoppspaltning, men enklest med variabelskifte.)

e) Delbrøkoppspalting: $\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$
$HS = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x + (A-B)}{(x-1)(x+1)}$
$A + B = 0 \wedge A - B = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$

$\int \frac{1}{x^2-1}\, dx = \int (\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)})dx = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C =$
$\ln \sqrt{x-1} - \ln \sqrt{x+1} + C = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C$

f) Lik grad i teller og nevner, så vi må polynomdividere først:
$x^2 : x^2 - 1 = 1 + \frac{1}{x^2-1}$

$\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int (1 + \frac{1}{x^2-1})dx = \int dx + \int \frac{1}{x^2-1}dx = x + \ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C$

(Siste integralet allerede løst i oppgave I e)!)

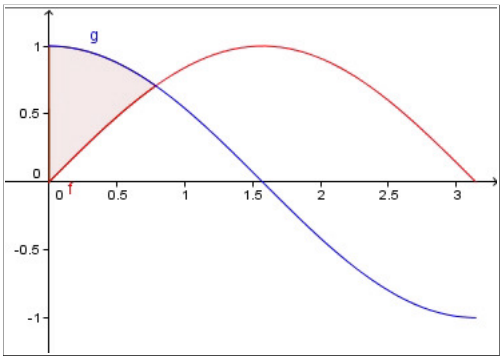
II

Gitt funksjonene $f(x) = \sin(x)$ og $g(x) = \cos(x)$, begge i intervallet $[0, \pi]$.

a) Finn arealet avgrenset av $f(x)$ og x-aksen.

b) Finn arealet avgrenset av $f(x)$, $g(x)$ og y-aksen.

Lag alltid figur i slike oppgaver:



Kontrollstrategier:

a) Arealet under $f(x)$ må være større enn $\frac{3 \cdot 1}{2} = 1.5$.

(Over halvparten av rektangel med grunnlinje 3 og høyde 1.)

b) Arealet her må være omtrent som $\frac{1 \cdot 0.75}{2} \approx 0.4$.

(Omtrent en trekant med grunnlinje 1 og høyde 0.75.)

a) $A_1 = \int_0^{\pi} \sin(x)dx = {}_0^{\pi}[-\cos(x)] = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2$

b) Skjæring $f(x)$ og $g(x)$: $\sin x = \cos x \Rightarrow \cos x \neq 0$ gir: $\frac{\sin x}{\cos x} = 1 \Leftrightarrow$
$\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (g(x) - f(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)dx = {}_0^{\frac{\pi}{4}}[\sin x + \cos x] =$
$\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - (\sin 0 + \cos 0) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - (0 + 1) =$
$\sqrt{2} - 1 \approx 0.414$

III

Gitt funksjonen $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$

a) Vis at $f'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

b) Finn det bestemte integralet $\int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$.

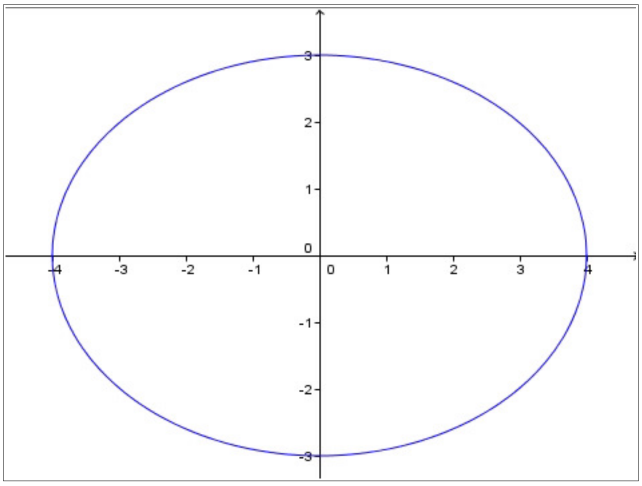
a) Kjerneregel: $f(x) = \sqrt{1-x^{-2}} = \sqrt{u}, \quad u = 1 - x^{-2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}}(-(-2x^{-3})) = \frac{1}{\sqrt{u}}x^{-3} = \frac{1}{x^3\sqrt{1-x^{-2}}} = \frac{1}{x^3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} =$$
$$\frac{1}{x^3\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = \frac{1}{x^3\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}} = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

b) $\int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx = {}_1^2\left[\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right] = \frac{\sqrt{2^2-1}}{2} - \frac{\sqrt{1^2-1}}{1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

IV

Hvis vi tegner alle punktene (x, y) som passer i ligningen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, får vi en kurve som vi kaller en ellipse. Tallene a og b er halvaksene i ellipsen, slik figuren illustrerer når $a = 4$ og $b = 3$:



a) Finn volumet av den figuren (ellipsoiden) vi får når vi dreier ellipsen med $a = 4$ og $b = 3$ 180° om x-aksen.

b) Finn en generell formel for volumet av ellipsoiden i a), der a og b ikke har noen bestemt verdi.

c) Kommenter hva som skjer når $a = b$.

Kontrollstrategi:
a) Volumet må være større enn to kjegler med volum:
$$2\frac{\pi 3^2 4}{3} \approx 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 72$$
Og mindre enn sylinder med volum:
$$2\pi 3^2 4 \approx 2 \cdot 3 \cdot 3^2 4 = 216$$

a) Løser mhp. y:
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 9\left(1 - \frac{x^2}{16}\right) \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{9\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)}$$

Omdreiningslegemet med $f(x) = \sqrt{9\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)}$
$$V = \pi\int_{-4}^{4}(f(x))^2dx = 9\pi\int_{-4}^{4}\left(1 - \frac{1}{16}x^2\right)dx = 9\pi\ {}_{-4}^{4}\left[x - \frac{1}{16}\frac{x^3}{3}\right] =$$
$$9\pi\left(4 - \frac{4^3}{48} - \left(-4 - \frac{(-4)^3}{48}\right)\right) = 9\pi\left(4 - \frac{4^3}{48} + 4 - \frac{4^3}{48}\right) =$$

$9\pi(8 - \frac{128}{48}) = 48\pi \approx 151$

b) Som a) med bokstaver: $f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

$V = \pi\int_{-a}^{a}(f(x))^2dx = \pi b^2\int_{-a}^{a}(1 - \frac{1}{a^2}x^2)dx = \pi b^2\ {}_{-a}^{\ a}\left[x - \frac{1}{a^2}\frac{x^3}{3}\right] =$
$\pi b^2(a - \frac{a^3}{3a^2} - (-a - \frac{(-a)^3}{3a^2})) = \pi b^2(a - \frac{a^3}{3a^2} + a - \frac{a^3}{3a^2}) =$
$\pi b^2(2a - \frac{2a}{3}) = \pi b^2\frac{4a}{3} = \frac{4}{3}\pi ab^2$

c) $a = b = r$ gir: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ som er formelen for volum av en kule, som er en ellipsoide der begge halvaksene er like og dermed lik radiusen i kulen.