R2: Kapittel 5.5 - 6.4 - Volumintegraler og differensialligninger

29.03.12

Løsningsskisser

Oppgave 1

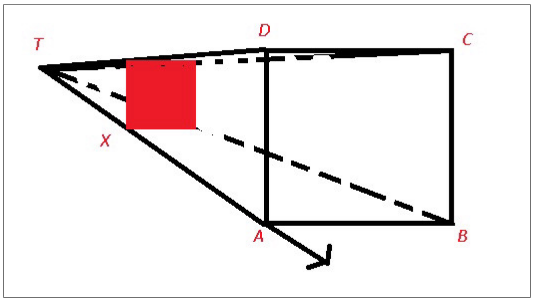
Gitt funksjonen $f(x) = 10 \cdot 5^{-\frac{x}{20}}$, $D_f = [0, 20]$ [cm]
Funksjonen skal dreies 360° om x-aksen slik at vi får et omdreiningslegeme som er en modell av en lysestake, før vi har dreid ut hullet til lyset.
Finn volumet av lysestaken.

$$V = \pi \int_0^{20} (10 \cdot 5^{-\frac{x}{20}})^2 dx = 100\pi \int_0^{20} 5^{-\frac{x}{10}} dx = 100\pi \; {}_0^{20}[-10 \frac{5^{-\frac{1}{10}}}{\ln 5}] = -\frac{1000\pi}{\ln 5} \; {}_0^{20}[5^{-\frac{1}{10}}] = -\frac{1000\pi}{\ln 5}(5^{-2} - 5^0) = -\frac{1000\pi}{\ln 5}(\frac{1}{25} - 1) = \frac{1000\pi}{\ln 5} \cdot \frac{24}{25} = \frac{960\pi}{\ln 5} \approx 1870 \text{ [cm}^3]$$

Kontroll: Litt mindre enn kjeglen: $\frac{\pi 10^2 20}{3} \approx 2100$

Oppgave 2

Vi har en pyramide med kvadratisk grunnflate $ABCD$, som vi har lagt med toppunktet T i origo, slik figuren viser:



X-aksen ligger langs sidekanten TA og grunnflaten $G = ABCD$ står normalt på x-aksen.
Høyden $H = AT$ er 15 og sidekantene i grunnflaten har alle lengden 8.
Vi vet at volumet er $V = \frac{GH}{3} = \frac{8^2 15}{3} = 320$, men ønsker å regne ut volumet med integrasjon, og plasserer derfor en snittflate i avstanden x fra origo (T), som står normalt på x-aksen.
a) Forklar hvorfor arealet av snittflaten, $A(x)$, er gitt av $\frac{A(x)}{G} = (\frac{x}{H})^2$.
b) Regn ut volumet ved hjelp av integrasjon.

a) Forholdet mellom arealene er lik kvadratet av det lineære forholdet:
$\frac{A(x)}{G} = (\frac{\text{side i } A(x)}{AB})^2$
Det siste forholdet er igjen lik $(\frac{x}{H})^2$ på grunn av de likeformede trekantene på den ene sideflaten.

b) $A(x) = \frac{G}{H^2}x^2$, slik at:
$V = \frac{G}{H^2}\int_0^H x^2 dx = \frac{G}{H^2} \; {}_0^H[\frac{x^3}{3}] = \frac{G}{H^2}(\frac{H^3}{3} - 0) = \frac{GH}{3} = \frac{8^2 15}{3} = 320$
Eller med tall:
$V = \frac{8^2}{15^2}\int_0^{15} x^2 dx = \frac{64}{15^2} \; {}_0^{15}[\frac{x^3}{3}] = \frac{64}{15^2}(\frac{15^3}{3} - 0) = \frac{64 \cdot 15}{3} = 320$

Oppgave 3

Løs differensialligningene:

a) $y' - x = \cos x$, med initialbetingelsen $y(0) = 3$

b) $y' + \frac{x}{y} = 0$, med initialbetingelsen $y(0) = 5$

c) $y' = xy + x$, med initialbetingelsen $y(0) = 0$

d) $y' = x - \frac{y}{x}$, med initialbetingelsen $y(1) = 2$

a) Eksakt, direkte integrasjon:

$y' = x + \cos x$

$y = \int (x + \cos x) dx = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$ (Generell løsning)

Initialbetingelse: $3 = 0 + \sin 0 + C \Leftrightarrow C = 3$

): $y = \frac{x^2}{2} + \sin x + 3$ (Spesiell løsning)

b) Separabel: $yy' = -x$

$\int y dy = -\int x dx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = C \Leftrightarrow$

$y = \pm\sqrt{C - x^2}$ (Generell løsning)

Initialbetingelse: $0^2 + 5^2 = C \Leftrightarrow C = 5^2$

): $x^2 + y^2 = 5^2$ eller $y = \pm\sqrt{5^2 - x^2}$ (Spesiell løsning)

Vi ser at dette er ligningen for en sirkel.
Differensialligningen $y' = -\frac{x}{y}$ uttrykker at tangentvektoren for kurven skal står normalt på posisjonsvektoren. Sirkler er de eneste kurver som har denne egenskapen. (Tangenter står alltid normalt på radiusen.)

c) Går både som separabel og med integrerende faktor.

Separabel: $y' = x(y + 1) \Leftrightarrow \frac{y'}{y+1} = x$

$\int \frac{1}{y+1} dy = \int x dx \Leftrightarrow \ln|y + 1| = \frac{x^2}{2} + C_1 \Leftrightarrow |y + 1| = e^{\frac{x^2}{2}} e^{C_1} \Leftrightarrow$

$|y + 1| = C_2 e^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow y + 1 = Ce^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow$

$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$ (Generell løsning)

Initialbetingelse: $0 = Ce^0 - 1 \Leftrightarrow C = 1$

): $y = e^{\frac{x^2}{2}} - 1$ (Spesiell løsning)

d) Lineær ligning: $y' + \frac{1}{x} y = x$

Integrerende faktor: $if = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$

$y'x + y = x^2 \Leftrightarrow$

(Kunne multiplisert med x med en gang hvis vi hadde sett at venstresiden av $y'x + y1 = x^2$ er den deriverte av et produkt.)

$(yx)' = x^2 \Leftrightarrow yx = \frac{x^3}{3} + C \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$ (Generell løsning)

Initialbetingelse: $2 = \frac{1}{3} + \frac{C}{1} \Leftrightarrow C = \frac{5}{3}$

): $y = \frac{x^2}{3} + \frac{5}{3x}$ (Spesiell løsning)

Oppgave 4

Bildet viser en plastflaske som tømmes for vann gjennom et hull nær bunnen:

Det kan vises at høyden på vannstanden inne i flasken, $h(t)$, er gitt ved differensialligningen:

$h'(t) = -0.0108 \cdot \sqrt{h(t)}$ [m/s], t i sekunder.

a) Finn den generelle løsningen av differensialligningen.

b) Finn den spesielle løsningen av differensialligningen, hvis $h(0) = 0.20$ [m].

c) Hvor lang tid tar det før flasken er tom?

a)

Separabel ligning: $h^{-\frac{1}{2}}h' = -0.0108$

$\int h^{-\frac{1}{2}}dh = -0.0108\int dt \Leftrightarrow \frac{h^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -0.0108t + C_1 \Leftrightarrow$

$\sqrt{h} = -0.0054t + C_2$

$\Rightarrow$

$h = (C - 0.0054t)^2$ (Generell løsning)

b) Initialbetingelse: $0.2 = (C-0)^2 \Leftrightarrow C = \sqrt{0.2} \approx 0.447$

): $h = (0.447 - 0.0054t)^2$ (Spesiell løsning)

c) Flasken er tom når $h(t) = 0$:

$(0.447 - 0.0054t)^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{0.447}{0.0054} \approx 82.8$ [sek]

Flasken er tom etter ca. 1 minutt og 23 sekunder.