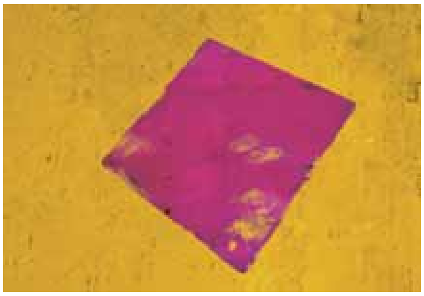
Matematikk R2. Kapittel 1 med fasit

Matematikk R2



Odd Heir
Gunnar Erstad
Håvard Moe
Per Arne Skrede

BOKMÅL

ASCHEHOUG

Matematikk R2 dekker målene i læreplanen av 2006 for Matematikk R2
i studiespesialiserende utdanningsprogram.

1. utgave / 1. opplag 2008

Redaktører: Dag-Erik Møller, Knut Barder og Ola Vestre
Grafisk formgivning og omslag: Mona Dahl og Marit Heggenhougen
Bearbeiding av omslagsfoto: Grafisk Form / Kathinka Kvalstad Eckhoff
Ombrekning: Type-it AS
Bilderedaktør: Tone Svinningen
Tekniske illustrasjoner: Framnes Tekst og Bilde AS

Grunnskrift: Sabon 10,8/13
Papir: 100 g Multiart matt 0,92
Trykk og innbinding: AIT Trykk Otta AS

ISBN 978-82-03-33702-4

www.aschehoug.no

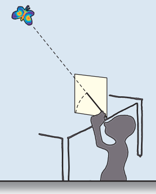
Bildeliste

s. 6ø Narinder Nanu/AFP Photo/Scanpix, s. 6m Science Photo Library/GV-Press/Nordic Photos, s. 6n Science Photo Library/GV-Press/Nordic Photos, s. 7ø SPL/GV-Press/Nordic Photos, s. 7m Olivier Maire/Keystone/AP Photo/Scanpix, s. 7n © Giacomo Balla/BONO 2008/ The Bridgeman Art Library, s. 8 Narinder Nanu/AFP Photo/Scanpix, s. 9 Christian Calmeyer, s. 12 Alberto Paredes/GV-Press/Nordic Photos, s. 18 Sylvain Grandadam/GV-Press/Nordic Photos, s. 26 ColorBlind Images/Corbis/Scanpix, s. 32 Kim Karpeles/GV-Press/Nordic Photos, s. 36 SuperStock/GV-Press/Nordic Photos, s. 42 ABP/GV-Press/Nordic Photos, s. 61 Terje Bendiksby/Scanpix, s. 63 Richard Cummins/GV-Press/Nordic Photos, s. 69 Marc Joseph/GV-Press/Nordic Photos, s. 74 Science Photo Library/ GV-Press/Nordic Photos, s. 81 George Barbiër/GV-Press/Nordic Photos, s. 84 DLILLC/Corbis/Scanpix, s. 91 Soren Breiting/GV-Press/Nordic Photos, s. 99 Dag G. Nordsveen/Samfoto, s. 103 Raymond Forbes/GV-Press/Nordic Photos, s. 106 Liane Cary/GV-Press/Nordic Photos, s. 111 Comstock Images/GV-Press/Nordic Photos, s. 116 Science Photo Library/GV-Press/Nordic Photos, s. 120 Martin M. Rotker/Photo Researchers/GV-Press/Nordic Photos, s. 125 Martin Rugner/GV-Press/Nordic Photos, s. 130 SuperStock/GV-Press/Nordic Photos, s. 137 Kord.com/GV-Press/Nordic Photos, s. 144 Georg Gerster/GV-Press/Nordic Photos, s. 156 Science Photo Library/GV-Press/Nordic Photos, s. 162 SPL/GV-Press/Nordic Photos, s. 167 Kord.com/GV-Press/Nordic Photos, s. 172 Martin Dohrn/Science/GV-Press/ Nordic Photos, s. 181 Photo Researches/GV-Press/Nordic Photos, s. 187 Nordic Photos, s. 200 Ole Graf/Zefa/Corbis/Scanpix, s. 205 Jann Lipka/Mira/Samfoto, s. 208 Olivier Maire/Keystone/AP Photo/Scanpix, s. 216 Anton J. Geisser/GV-Press/Nordic Photos, s. 222 Tony Karumba/AFP Photo/Scanpix ,s. 231 Arne Ove Bergo/Dagsavisen/Samfoto, s. 238 Markus Botzek/Corbis/Scanpix, s. 243 Science Photo Library/GV-Press/Nordic Photos, s. 254 Nasjonal-biblioteket i Oslo/Bildesamlingen, s. 262 © Giacomo Balla/BONO 2008/The Bridgeman Art Library, s. 264 Getty Images, s. 272 Ed Kashi/Corbis/Scanpix, s. 275 Mike Kemp/Getty Images, s. 287 Lester Lefkowitz/Corbis/Scanpix, s. 289 Art Wolfe/Getty Images, s. 290 The Bridgeman Art Library, s. 293 AFP Photo/Scanpix, s. 296 Pedro Armestre/Greenpeace/AFP Photo/Scanpix, s. 303 Mike Powell/Corbis/Scanpix, s. 309 Turbo/Zefa/Corbis/Scanpix, s. 318 Felbert + Eickenberg/GV-Press/Nordic Photos, s. 325 GV-Press/Nordic Photos, s. 338 Brendan Regan/Corbis/Scanpix, s. 340 Stefano Oppo/GV-Press/Nordic Photos, s. 353 Joe Raedle/AFP/Scanpix, s. 359 Ben Margot/AP Photo/Scanpix, s. 366 Jose Luis Pelaez/Getty Images, s. 372 Jan Banning/EPA/Scanpix, s. 382 Dinodia/ GV-Press/Nordic Photos, s. 388 George Steinmetz/Corbis/Scanpix, s. 400 Buzz Pictures Ltd./GV-Press/Nordic Photos, s. 404 Mitsuaki Iwago/GV-Press/Nordic Photos, s. 406 SPL/GV-Press/Nordic Photos

Guide til Matematikk R2

Aktivitet i starten av hvert kapittel:

AKTIVITET: Å måle vinkler uten gradskive



Sikt mot et punkt fra kanten av en pult langs et vertikalt A4-ark med en «siktepinne», se figuren.
Tegn sikteretningen på arket.
Drei siktepinnen ned til pulten og tegn buen som enden av pinnen følger. Da får du en vinkel med bue.
Mål lengden av pinnen og av buen.

Undersøk om du kan lage et mål for vinkelen uten å bruke gradskive.

Én mulighet er å beregne forholdet mellom buelengden og lengden av pinnen (radien til sirkelbuen).

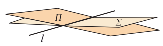
Læringsmål i margen ved starten av hvert underkapittel:

5.5 VOLUMBEREGNINGER

I 5.5 skal du lære å regne ut volumer av omdreiningsfigurer.

I underkapittel 5.1 brukte vi bestemt integral til å regne ut arealer under kurver. Nå skal vi se at integralregning også kan brukes til å regne ut volumer.

Teori:



Skjæring mellom plan

Hvis to plan ikke er parallelle, skjærer de hverandre langs en rett linje.

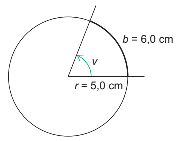
For å bestemme en vektorlikning eller en parameterframstilling for skjæringslinja l mellom to plan Π og Σ, trenger vi to punkter på linja l, eller ett punkt og en retningsvektor.

Eksempler:

Eksempel 1 Absolutt vinkelmål for en vinkel *v*

Vi plasserer toppunktet til en vinkel v i sentrum av en sirkel med radius 5,0 cm. Buelengden b er 6,0 cm.
Absolutt vinkelmål for v er da

$$v = \frac{b}{r} = \frac{6{,}0\text{ cm}}{5{,}0\text{ cm}} = 1{,}2$$



Innlæringsoppgaver, med henvisninger til oppgavesamlingen bak i boka:

Sti 1	Sti 2	Sti 3

Stifinner: side 331

Oppgave 2.7
Bruk digitalt verktøy til å finne en eksplisitt formel for det n-te leddet i tallfølgen.
a $1, 5, 10, 16, 23, \ldots$ b $3, 17, 55, 129, 251, \ldots$

Oppgavesamling bak i boka, med tre forslag til *stier*:

6.2 Integralkurver og initialbetingelser

Sti 1	Sti 2	Sti 3
612, 614, 616, 617, 618	613, 614, 616, 618, 619▲, 620▲	613, 614, 615, 618, 619▲, 621▲▲, 622▲▲

612 Løs likningen $y' = 2x - 1$. Skisser noen typiske integralkurver. Kommenter kurveskaren.

Nettstedet:

Forord

Matematikk R2

Læreverket *Matematikk R2* er skrevet for læreplanen Matematikk R2 (matematikk for realfag) på studiespesialiserende utdanningsprogram. Utdrag fra læreplanen finner du på side 415.

Læreverket består av

- *Læreboka*, alt-i-ett, med teori, eksempler, innlæringsoppgaver og oppgavesamling.
- *Nettstedet*, på Lokus.no, med bl.a. interaktive oppgaver og animasjoner.

Læreboka

Hvert kapittel innledes med en kort aktivitet som kan gi deg en idé om hva kapitlet inneholder. Aktivitetene egner seg godt for samtale.

I hvert underkapittel finner du teori, eksempler og innlæringsoppgaver. Innlæringsoppgavene er plassert løpende i teksten, slik at du hele tiden kan kontrollere om du har forstått lærestoffet. Du bør regne alle innlæringsoppgavene. Du kan så gå til oppgavesamlingen bak i boka for videre arbeid og utdypning.

I slutten av hvert kapittel finner du en kapitteltest og et sammendrag. Her kan du kontrollere om du har forstått helheten i kapitlet. Sammendragene inneholder bl.a. norsk-engelske ordlister med ti sentrale begreper fra kapitlet.

Du finner løsninger til innlæringsoppgavene og kapitteltestene på nettstedet.

Underveis har vi plassert bilder som kan utdype teksten og knytte stoffet til samfunn og kultur. Vi oppfordrer til aktiv bruk av bildene.

Oppgavesamlingen bak i læreboka

I oppgavesamlingen finner du varierte oppgaver av mange forskjellige typer og vanskelighetsgrader.

Du finner blandede oppgaver i slutten av hvert kapittel. Dessuten testen «15 rette eller gale» og eksamensoppgaver. Eksamensoppgavene er merket med X.

▲ ▲▲ Oppgavene innenfor et underkapittel er ordnet etter vanskelighetsgrad. De letteste er ikke markert. De noe vanskeligere er markert med trekanter: ▲ eller ▲▲. De blandede oppgavene har ikke markeringer for vanskelighetsgrad.

* Noen oppgaver fra oppgavesamlingen har løsninger på nettstedet. Disse oppgavene er merket med stjerne *.

Til hjelp i arbeidet har vi laget *Stifinneren*, en tabell med tre forskjellige forslag til «stier». En sti er et utvalg av oppgaver satt i en passende rekkefølge.
Sti 1 er lettest. Sti 3 er vanskeligst.

Nettstedet

Nettstedet har samme kapittelinndeling som læreboka. Til hvert kapittel har vi laget *interaktive oppgaver* av mange typer. Her får du vite med en gang om du har svart riktig, og ofte kan du velge å se hint og løsningsforslag.

Vi har også laget *animasjoner*, *regneark*, *lenkesamling*, *lenkeoppgaver* og *opplæringskurs i bruk av digitale verktøy*.
Nettstedet vil være i stadig utvikling.

Digitale verktøy

Der det har vært aktuelt å forklare bruken av lommeregnere, har vi forklart inntastingen for Casio CFX-9850/fx-9860-seriene og Texas TI-83/TI-84-seriene.

I noen oppgaver blir du bedt om å bruke digitalt verktøy. Disse oppgavene kan vanligvis løses både på lommeregner og ved å bruke andre digitale verktøy.

Det vil i en del tilfeller være aktuelt å bruke regneark i arbeidet med matematikk. Derfor har vi tatt med eksempler på slik bruk. Forklaringene er tilpasset Microsoft Excel og regnearket i OpenOffice.

Du kan bruke registeret for å finne hvor i boka bruk av digitale verktøy er forklart. Se stikkordene *digitalt verktøy*, *GeoGebra*, *Lokus*, *lommeregner*, *regneark*, *symbolbehandlende verktøy* og *TI-nspire*.

Takk

Vi takker konsulentene Jostein Walle, Petter Callin, Åse Alvær Pedersen, Filip Hansen og Terrence Baine for gode forslag og innspill. En spesiell takk til redaktørene Dag-Erik Møller, Knut Barder og Ola Vestre og teknisk redaktør Fred W. Alvad.

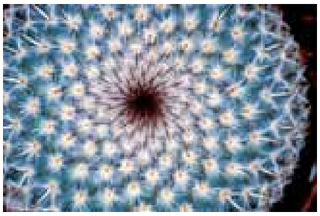
Lykke til

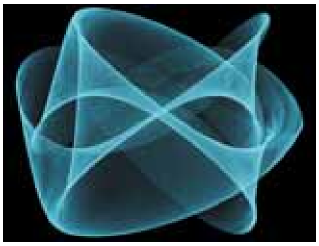
I årenes løp har vi fått mange nyttige tilbakemeldinger fra elever og lærere. Ønsker du å gi kommentarer, kan du bruke adressen matematikkR2@aschehoug.no.

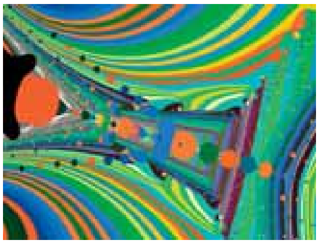
Vi ønsker deg lykke til med bruken av læreverket!

Hilsen
Odd Heir, Gunnar Erstad, Håvard Moe og *Per Arne Skrede*

Innhold





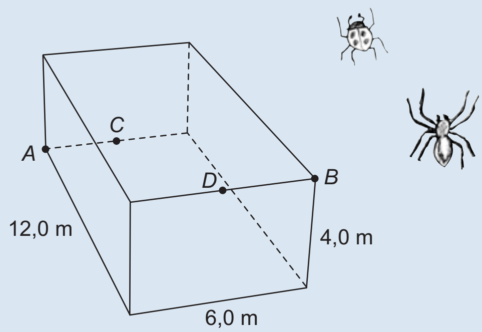


1 Vektorer

Bildet er fra Amritsar i Punjabprovinsen i nordvest-India og viser barn som deltar i hindufesten Dussehra. Dussehra feires over hele India i oktober og er en markering av det godes seier over det onde.

AKTIVITET: Hvor lang vei har krypene?

Figuren viser klasserommet til en R2-gruppe. I det ene hjørnet A befinner det seg to edderkopper og en marihøne. For å få bedre oversikt når undervisningen starter, forflytter de seg til hjørnet B. Den ene edderkoppen har et snev av agorafobi (redsel for åpne plasser) – som ikke må forveksles med araknofobi (edderkoppskrekk). Derfor ferdes den bare langs kanter. De andre tar korteste veien, til «fots» eller «på vinger».



Hva er den korteste veien for edderkoppen med agorafobi, edderkoppen uten agorafobi og marihøna?

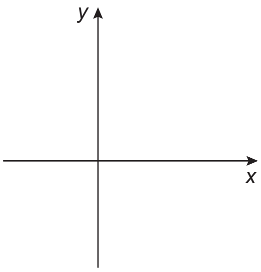
En tredje geometriinteressert edderkopp starter fra C og skal til D. Hva er den korteste veien for henne? C og D er midtpunkter på hver sin sidekant. (Tenk litt på denne.)

1.1 VEKTORER I ROMMET

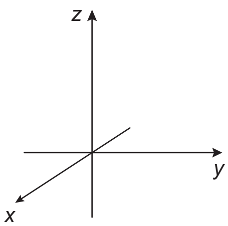
I 1.1 skal du lære å regne med vektorer i et tredimensjonalt koordinatsystem.

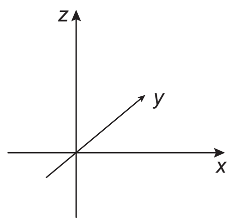
Koordinater i rommet

I R1 lærte du om geometri og vektorer i planet. I planet kan vi plassere hvert punkt ved hjelp av to koordinater, én x- og én y-koordinat.
I dette kapitlet skal vi opp fra planet og ut i rommet. Da trenger vi et koordinatsystem med tre akser, en x-akse, en y-akse og en z-akse. I de fleste situasjoner er det praktisk å la z-aksen stå vinkelrett på både x- og y-aksen. For koordinatsystemet på figuren har vi to muligheter for orienteringen til z-aksen. Den kan ha retning «ut av papiret» eller «inn i papiret».



I et *høyrehånds koordinatsystem* kommer z-aksen ut av papiret når x- og y-aksen har retningene som på figuren.
Ved å rotere litt på koordinatsystemet, men beholde den innbyrdes orienteringen til aksene, kan vi få fram en viss tredimensjonal effekt.

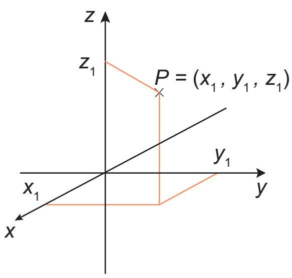




For å forsikre oss om at koordinataksene danner et høyrehånds koordinatsystem, kan vi bruke *høyrehåndsregelen*.

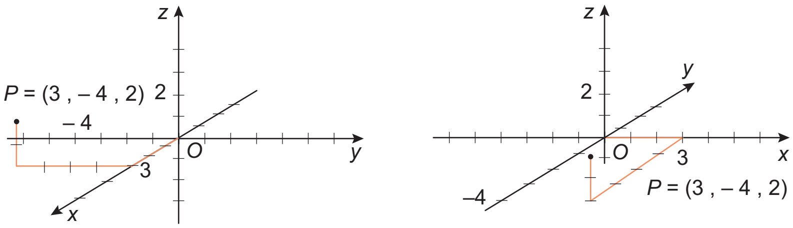
La en strak pekefinger på høyre hånd peke langs x-aksen.
Bøy de andre fingrene slik at de peker langs y-aksen.
Da skal tommelen peke langs z-aksen.

Med tre koordinatakser vil det til hvert punkt i rommet svare tre koordinater. Og til hvert ordnet talltrippel (x, y, z) svarer det ett bestemt punkt.



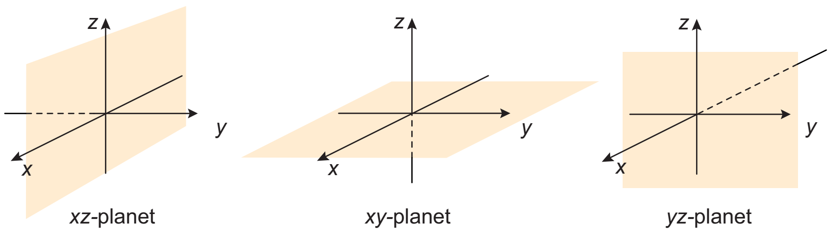
Eksempel 1 Koordinater i rommet

Et punkt P har koordinatene $(3\,,-4\,,2)$.



For å komme fra origo O til P må vi gå tre enheter i x-retningen, fire enheter i negativ y-retning og to enheter i z-retningen.

x- og z-aksen definerer et plan, som vi kaller xz-planet.
xz-planet er altså det planet som inneholder både x-aksen og z-aksen. Alle punkter i rommet med for eksempel y-koordinat 3 ligger tre enheter fra xz-planet i positiv y-retning, det vil si i den retningen y-aksen peker.



Tilsvarende ligger alle punkter med z-koordinat 5, fem enheter fra xy-planet.
Hva kan du si om et punkt som ligger fire enheter fra yz-planet?

Oppgave 1.1
Tegn et høyrehånds tredimensjonalt koordinatsystem og tegn inn punktene.

a $P=(4\,,3\,,0)$ **b** $Q=(1\,,5\,,2)$ **c** $P=(-1\,,5\,,-2)$

Oppgave 1.2

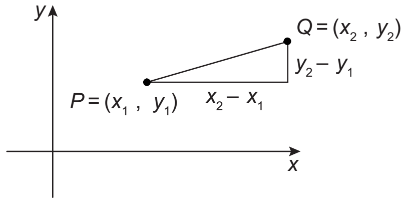
a Hva er avstanden fra punktet $P=(2\,,3\,,1)$ til xy-planet, xz-planet og til yz-planet?

b Hva er avstanden fra $Q=(-1\,,0\,,-4)$ til xy-planet, xz-planet og til yz-planet?

c Et punkt R ligger fire enheter fra xy-planet, to enheter fra xz-planet og fem enheter fra yz-planet. Skriv ned alle mulige koordinater for R.

Avstander i rommet

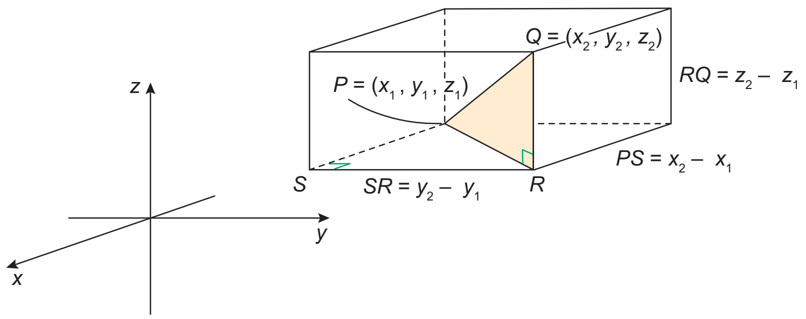
I planet finner vi avstanden mellom to punkter ved å bruke pytagorassetningen.

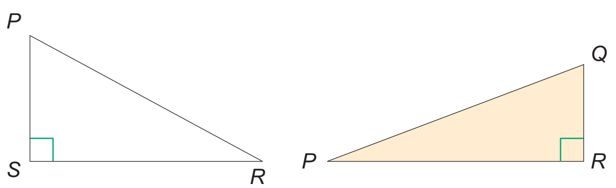


$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

I rommet får vi en tilsvarende formel ved å bruke pytagorassetningen to ganger.

Vi skal finne avstanden mellom punktene $P = (x_1\ , y_1\ , z_1)$ og $Q = (x_2\ , y_2\ , z_2)$. Vi lar R være punktet med samme x- og y-koordinat som Q, og samme z-koordinat som P. Punktet S har samme y- og z-koordinat som P, og samme x-koordinat som Q.





PQ er hypotenusen i den rettvinklede trekanten PRQ. Det gir

$$PQ^2 = PR^2 + RQ^2 \qquad (1)$$

PR er hypotenusen i den rettvinklede trekanten PSR. Det gir

$$PR^2 = PS^2 + SR^2 \qquad (2)$$

Setter vi (2) inn i (1), får vi

$$PQ^2 = PS^2 + SR^2 + RQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

Det gir *avstandsformelen*:

Avstanden mellom to punkter i rommet
Gitt punktene $Q=(x_1\,,y_1\,,z_1)$ og $P=(x_2\,,y_2\,,z_2)$.
Da er avstanden mellom punktene
$QP=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Setter vi $Q=(0\,,0\,,0)$ og $P=(x\,,y\,,z)$ i avstandsformelen, får vi:

Avstanden fra origo til et punkt i rommet
Avstanden fra origo O til $P(x\,,y\,,z)$ er $OP=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Avstanden mellom to punkter i rommet ...

Eksempel 2 Avstanden mellom to punkter

Vi skal bestemme avstanden mellom punktene $P=(2\,,-3\,,4)$ og $Q=(5\,,2\,,-1)$.
Vi bruker avstandsformelen og får

$$PQ=\sqrt{(5-2)^2+\left(2-(-3)\right)^2+(-1-4)^2}$$
$$=\sqrt{3^2+5^2+(-5)^2}=\sqrt{59}=7{,}68$$

Oppgave 1.3
Regn ut avstanden fra origo til punktet P når
a $P=(4\,,2\,,4)$ **b** $P=(-1\,,5\,,-2)$

Oppgave 1.4

Bestem avstanden mellom punktene P og Q når

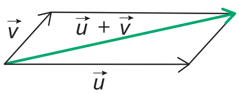
a $P = (1, 3, 2)$ og $Q = (6, 4, 5)$

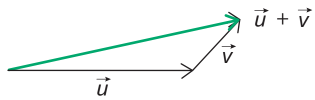
b $P = (-4, 2, 1)$ og $Q = (2, 4, -1)$

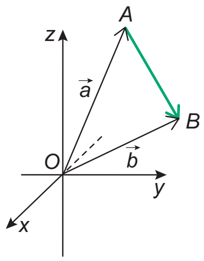
c $P = (-1, 5, -2)$ og $Q = (-1, 4, -5)$

Vektorer i rommet

Vi kan ta med oss alt vi lærte om vektorer i planet, til romgeometrien.
For eksempel kan vi addere to vektorer i rommet ved parallellogrammetoden eller trekantmetoden.







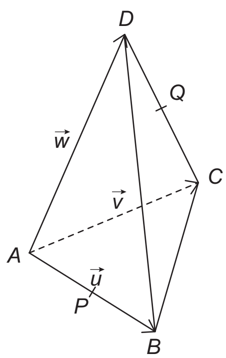
De to vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ bestemmer et plan Π, og vektorsummen $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ligger i planet Π.

To punkter A og B har posisjonsvektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Da er $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$.

Eksempel 3 Vektoruttrykk i en pyramide

A, B, C og D danner en trekantet pyramide.
En slik pyramide med fire sideflater kaller vi et *tetraeder* (fireplansfigur, tetra = fire, hedra = flate).



Vi lar P være midtpunktet på AB, og Q være midtpunktet på CD. Vi setter $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ og $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

Vi skal finne $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ og $\overrightarrow{PQ}$ uttrykt ved $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$.

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} - \vec{u}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} - \vec{v}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ}$$

Vektorene $\overrightarrow{PB}$ og $\overrightarrow{CQ}$ uttrykt ved $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ blir

$$\overrightarrow{PB} = \tfrac{1}{2}\vec{u} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{CQ} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \tfrac{1}{2}(\vec{w} - \vec{v})$$

Det gir

$$\overrightarrow{PQ} = \tfrac{1}{2}\vec{u} + \vec{v} - \vec{u} + \tfrac{1}{2}(\vec{w} - \vec{v}) = \tfrac{1}{2}\vec{u} - \vec{u} + \vec{v} - \tfrac{1}{2}\vec{v} + \tfrac{1}{2}\vec{w} = -\tfrac{1}{2}\vec{u} + \tfrac{1}{2}\vec{v} + \tfrac{1}{2}\vec{w}$$

I eksempel 3 kan vi velge andre «veier» fra P til Q.
Går vi fra P til A først, kan vi utnytte midtpunktsformelen fra R1 for vektoren fra A til Q.

Midtpunktet på linjestykket mellom to punkter
Vi lar M være midtpunktet på linjestykket mellom punktene P og Q.
Da er $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$ posisjonsvektoren for M. ③

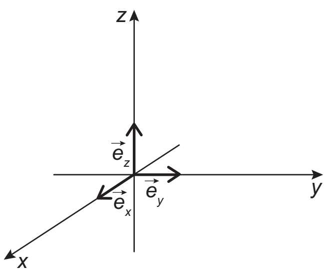
I eksempel 3 er Q midtpunktet på CD. Da er
$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{w})$.

Oppgave 1.5
La R være midtpunktet på AD og S være midtpunktet på BC i pyramiden i eksempel 3.

a Finn $\overrightarrow{RS}$ uttrykt ved $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$.

b Finn $\overrightarrow{AR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{RS}$ uttrykt ved $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$.

c Finn $\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ uttrykt ved $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$. Hva kan du slutte av dette svaret og svaret i oppgave b?

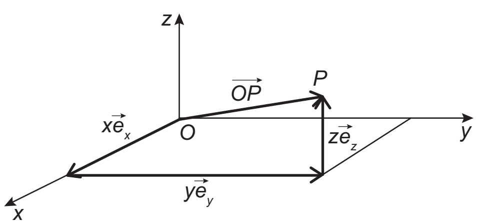


Vektorkoordinater i rommet

I et todimensjonalt koordinatsystem med $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$ som enhetsvektorer kan alle vektorer uttrykkes ved $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$. I et tredimensjonalt koordinatsystem trenger vi også en enhetsvektor langs z-aksen. Den skriver vi som $\vec{e}_z$.

Alle vektorer i et romkoordinatsystem kan uttrykkes ved de tre enhetsvektorene.
For eksempel er $\vec{v} = 3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + \vec{e}_z$ en vektor som framkommer ved å gå tre enheter i x-retningen, to enheter i negativ y-retning og én enhet i z-retningen.

Et punkt $P = (x\,, y\,, z)$ har posisjonsvektoren
$\overrightarrow{OP} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z$, der O er origo.

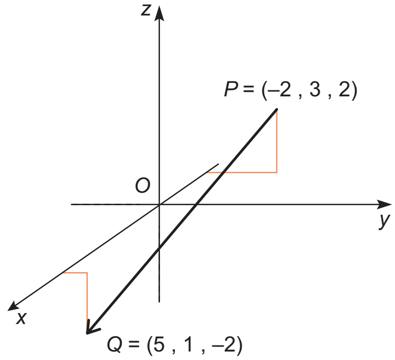


Eksempel 4 Vektor mellom to gitte punkter

Når $P=(-2\,,3\,,2)$ og $Q=(5\,,1\,,-2)$, får vi disse posisjonsvektorene til P og Q:

$$\overrightarrow{OP}=-2\vec{e}_x+3\vec{e}_y+2\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{OQ}=5\vec{e}_x+\vec{e}_y-2\vec{e}_z$$



Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ blir

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}=-\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\\&=5\vec{e}_x+\vec{e}_y-2\vec{e}_z-(-2\vec{e}_x+3\vec{e}_y+2\vec{e}_z)\\&=5\vec{e}_x+\vec{e}_y-2\vec{e}_z+2\vec{e}_x-3\vec{e}_y-2\vec{e}_z=7\vec{e}_x-2\vec{e}_y-4\vec{e}_z\end{aligned}$$

Med vektorkoordinater skriver vi vektoren $\overrightarrow{PQ}$ i eksempel 4 som $[7\,,-2\,,-4]$. Dette betyr at vi må gå sju enheter i x-retningen, to enheter i negativ y-retning og fire enheter i negativ z-retning for å komme fra P til Q.

Generelt skriver vi $[x_1\,,y_1\,,z_1]$ for vektoren $x_1\cdot\vec{e}_x+y_1\cdot\vec{e}_y+z_1\cdot\vec{e}_z$.

Oppgave 1.6

Bruk 3 på forrige side til å finne posisjonsvektoren til midtpunktet M på linjestykket mellom $P=(x_1\,,y_1\,,z_1)$ og $Q=(x_2\,,y_2\,,z_2)$. Hva er koordinatene til M?

Regneregler med vektorkoordinater

For vektorer i et tredimensjonalt koordinatsystem har vi følgende regneregler:

Vektoraddisjon og multiplikasjon med skalar

- $[x_1\,,y_1\,,z_1]+[x_2\,,y_2\,,z_2]=[x_1+x_2\,,y_1+y_2\,,z_1+z_2]$
- $[x_1\,,y_1\,,z_1]-[x_2\,,y_2\,,z_2]=[x_1-x_2\,,y_1-y_2\,,z_1-z_2]$
- $k\cdot[x_1\,,y_1\,,z_1]=[kx_1\,,ky_1\,,kz_1]$

Eksempel 5 Vektordifferanse og multiplikasjon med skalar

Vi skal regne ut $2\vec{u}-5\vec{v}$ når $\vec{u}=[3\,,-5\,,1]$ og $\vec{v}=[0\,,-1\,,2]$.

$$\begin{aligned}2\vec{u}-5\vec{v}&=2\cdot[3\,,-5\,,1]-5\cdot[0\,,-1\,,2]\\&=[6\,,-10\,,2]-[0\,,-5\,,10]\\&=[6-0\,,-10-(-5)\,,2-10]\\&=[6\,,-5\,,-8]\end{aligned}$$

Oppgave 1.7
$\vec{u} = [-4, 1, 2]$ og $\vec{v} = [2, 0, -3]$. Regn ut

a $\vec{u} + 2\vec{v}$ b $3\vec{v} - 2\vec{u}$

Vektoren mellom to punkter
Gitt punktene $P = (x_1, y_1, z_1)$ og $Q = (x_2, y_2, z_2)$.
$\overrightarrow{PQ} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$

Bevis:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$
$$= [x_2, y_2, z_2] - [x_1, y_1, z_1] = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$$

Lengden av en vektor

Ved å bruke avstandsformelen fra side 12 får vi lengden av $\overrightarrow{PQ}$.

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (4)$$

Setter vi $Q = (x, y, z)$ og $P = O = (0, 0, 0)$ i (4), får vi

$$|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Det gir:

Lengden av en vektor
Vektoren $\vec{v} = [x, y, z]$ har lengden $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Eksempel 6 Lengden av en vektor

Vektoren $\vec{v} = [4, -3, 2]$ har lengden $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{29} = 5{,}39$.

En vektor som har lengden 1, kaller vi en *enhetsvektor*.

Generelt er $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ en enhetsvektor i retningen til $\vec{u}$.

For $\vec{v} = [4, -3, 2]$ i eksempel 6 får vi

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{[4, -3, 2]}{\sqrt{29}} = \left[\frac{4}{\sqrt{29}}, -\frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\right] = [0{,}74, -0{,}56, 0{,}37]$$

$[0{,}74, -0{,}56, 0{,}37]$ er altså en enhetsvektor i retningen til $\vec{v} = [4, -3, 2]$.

Oppgave 1.8

Finn $\overrightarrow{PQ}$ og $|\overrightarrow{PQ}|$ når

a $P=(2,1,0)$ og $Q=(6,1,3)$

b $P=(4,-1,2)$ og $Q=(2,1,-3)$

c $P=(-5,11,-3)$ og $Q=(2,1,-4)$

Oppgave 1.9

a Regn ut lengden av $\vec{v}=[-12,3,4]$.

b Regn ut lengden av $\vec{v}=[1,-5,-2]$.

c Bestem mulige verdier for t slik at $|[5,-3,t]|=10$.

Parallelle vektorer

To vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle hvis og bare hvis det eksisterer et tall k slik at $\vec{u}=k\cdot\vec{v}$.

$$\vec{u}\,\|\,\vec{v} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{u}=k\cdot\vec{v} \qquad (\vec{v}\neq\vec{0})$$

Eksempel 7 Parallelle vektorer

Vi skal bestemme s og t slik at $\vec{u}=[5,s,-1]$ og $\vec{v}=[-12,3,t]$ blir parallelle.
Da må vi finne en k slik at $\vec{u}=k\cdot\vec{v}$.

$$[5,s,-1]=k\cdot[-12,3,t]$$

$$[5,s,-1]=[-12k,3k,kt]$$

Fra x-komponentene kan vi finne k:

$$5=-12k$$

$$k=\frac{5}{-12}=-\frac{5}{12}$$

Fra y-komponentene får vi

$$s=3k=3\cdot\left(-\frac{5}{12}\right)=-\frac{15}{12}=-\frac{5}{4}=-1{,}25$$

z-komponentene gir

$$-1=kt=-\frac{5}{12}t$$

$$t=\frac{12}{5}=2{,}4$$

Vektorene $\vec{u}=[5,-1{,}25,-1]$ og $\vec{v}=[-12,3,2{,}4]$ er parallelle.

Oppgave 1.10

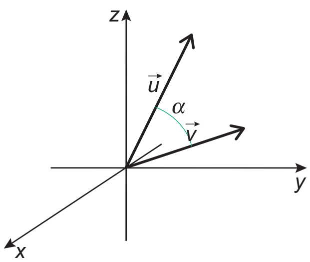
Bestem s og t slik at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ blir parallelle.

a $\vec{u}=[4,-3,s]$ og $\vec{v}=[-12,t,-6]$

b $\vec{u}=[2,1,0]$ og $\vec{v}=[5,s,t]$

c $\vec{u}=[s,s-2,-2]$ og $\vec{v}=[2t,t,6]$

Skalarprodukt



I R1 definerte vi skalarproduktet av to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

Denne definisjonen gjelder også i rommet. α er vinkelen mellom vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$. Det vil si den minste vinkelen vi må dreie én av vektorene for at den skal få samme retning som den andre vektoren. Det betyr at vinkelen α ligger i intervallet $[0°, 180°]$.

For skalarproduktet gjelder disse regnereglene:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k\vec{u} \cdot \vec{v}$

Av definisjonen på skalarprodukt og regnereglene ovenfor kan vi utlede en formel for skalarprodukt på koordinatform.
Hvis vinkelen α mellom to vektorer er 90°, er $\cos\alpha = 0$. Da er også skalarproduktet lik null.

Derfor er $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0$.

I tillegg er $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$.

Ved å bruke regnereglene ovenfor får vi

$$\begin{aligned}
&(x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z) \cdot (x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y + z_2\vec{e}_z) \\
&= x_1\vec{e}_x \cdot x_2\vec{e}_x + x_1\vec{e}_x \cdot y_2\vec{e}_y + x_1\vec{e}_x \cdot z_2\vec{e}_z + y_1\vec{e}_y \cdot x_2\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y \cdot y_2\vec{e}_y \\
&\qquad + y_1\vec{e}_y \cdot z_2\vec{e}_z + z_1\vec{e}_z \cdot x_2\vec{e}_x + z_1\vec{e}_z \cdot y_2\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z \cdot z_2\vec{e}_z \\
&= x_1\vec{e}_x \cdot x_2\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y \cdot y_2\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z \cdot z_2\vec{e}_z \\
&= x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2
\end{aligned}$$

Skalarprodukt på koordinatform
$[x_1\,, y_1\,, z_1]\cdot[x_2\,, y_2\,, z_2] = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2$

Eksempel 8 Skalarprodukt

Vi skal regne ut skalarproduktene $\vec{u}\cdot\vec{v}$ og $\vec{u}\cdot\vec{w}$ når $\vec{u}=[4\,,3\,,-1]$, $\vec{v}=[1\,,3\,,5]$ og $\vec{w}=[-2\,,6\,,10]$.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = [4\,,3\,,-1]\cdot[1\,,3\,,5] = 4\cdot 1+3\cdot 3+(-1)\cdot 5 = 4+9-5 = 8$$

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = [4\,,3\,,-1]\cdot[-2\,,6\,,10] = 4\cdot(-2)+3\cdot 6+(-1)\cdot 10 = -8+18-10 = 0$$

Siden $\vec{u}\cdot\vec{w}=0$, står $\vec{u}$ og $\vec{w}$ vinkelrett på hverandre.

$\vec{u}$ og $\vec{v}$ står ikke vinkelrett på hverandre. Da $\vec{u}\cdot\vec{v}$ er større enn null, er vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ mellom $0°$ og $90°$.

I R1 kalte vi to vektorer som står vinkelrett på hverandre for ortogonale vektorer.

Ortogonale vektorer
$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{u}\perp\vec{v}$

$x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad [x_1\,, y_1\,, z_1]\perp[x_2\,, y_2\,, z_2]$

Vi sier at $\vec{0}$ er vinkelrett på enhver vektor. Derfor gjelder ekvivalensen ovenfor også hvis én av (eller begge) vektorene er $\vec{0}$.

Oppgave 1.11
Regn ut skalarproduktet $\vec{u}\cdot\vec{v}$ og avgjør om vektorene står vinkelrett på hverandre.

a $\vec{u}=[2\,,1\,,4]$ og $\vec{v}=[0\,,4\,,-1]$
b $\vec{u}=[5\,,-2\,,1]$ og $\vec{v}=[3\,,6\,,-2]$

Å finne vinkelen mellom to vektorer

I tillegg til å sjekke om to vektorer er ortogonale, bruker vi skalarproduktet til å finne vinkelen mellom to vektorer.

Fra definisjonen $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$ får vi at $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$.

Eksempel 9 Vinkelen mellom to vektorer

Vi skal finne vinkelen α mellom $\vec{u} = [2, -1, 2]$ og $\vec{v} = [-1, 3, 4]$.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{[2, -1, 2]\cdot[-1, 3, 4]}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{2\cdot(-1) + (-1)\cdot 3 + 2\cdot 4}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{26}} = \frac{3}{3\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{26}} = 78{,}7°$$

Metoden i eksempel 9 skal vi seinere også bruke til å finne vinkelen mellom to linjer, og vinkelen mellom to plan.

Oppgave 1.12

Finn vinkelen mellom

a $[1, -1, 2]$ og $[4, 1, 3]$

b $[7, -4, 5]$ og enhetsvektoren langs y-aksen

c $\vec{e}_x + \vec{e}_z$ og $\vec{e}_y - \vec{e}_z$

Sti 1	Sti 2	Sti 3

Stifinner: side 313

1.2 PARAMETERFRAMSTILLINGER

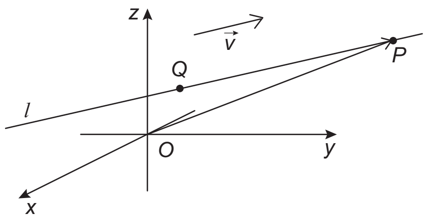
I 1.2 skal du lære å lage vektorlikninger og parameterframstillinger for linjer og plan.

Plan og linjer i rommet

Når vi arbeider med vektorer, linjer og plan, bruker vi en del setninger og definisjoner som vi ikke alltid tenker over. Her er noen eksempler:

- En rett linje er entydig bestemt av to punkter som ligger på linja.
- En flate er et plan dersom alle rette linjer som har minst to punkter felles med flaten, ligger i flaten.
- Et plan er entydig bestemt av tre punkter når punktene ikke ligger på samme rette linje.
- To rette linjer som ligger i samme plan uten å ha fellespunkter, kalles parallelle.
- En rett linje som ikke har noe fellespunkt med et gitt plan, er parallell med planet.
- To plan er parallelle hvis de faller sammen eller ikke har noen felles punkter.
- Skjæringen mellom to ikke-parallelle plan er en rett linje som kalles skjæringslinja mellom planene.
- Med vinkelen mellom to rette linjer som skjærer hverandre, mener vi den minste vinkelen som linjene danner. En vinkel mellom to rette linjer er altså en vinkel i intervallet $[0°, 90°]$.
- To rette linjer som ikke ligger i samme plan, kalles vindskeive. Med vinkelen mellom to vindskeive linjer l og m mener vi vinkelen mellom to skjærende linjer som er parvis parallelle med l og m.
- En normal til et plan er en linje som står vinkelrett på alle linjer i planet.
- En linje som står vinkelrett på to ikke-parallelle linjer i et plan, står vinkelrett på alle rette linjer i planet.

Parameterframstilling for linjer i rommet



En rett linje er bestemt av to punkter eller ett punkt og en retning. Retningen til en linje gir vi ved en vektor som er parallell med linja, en retningsvektor.
Vi skal lage en parameterframstilling for en rett linje i rommet.
Framgangsmåten er lik den vi brukte for linjer i planet i R1.
Vi lar $Q = (x_0 , y_0 , z_0)$ være et punkt på en rett linje l med $\vec{v} = [a , b , c]$ som retningsvektor.
$P = (x , y , z)$ er et vilkårlig punkt på linja.

Uansett hvor på l P ligger, så er $\overrightarrow{QP}$ og $\vec{v}$ parallelle.
Posisjonsvektoren til P kan derfor skrives

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \vec{v}$$

Med koordinater får vi vektorlikningen

$$[x , y , z] = [x_0 , y_0 , z_0] + t \cdot [a , b , c]$$

som er ekvivalent med parameterframstillingen

$$x = x_0 + at$$

$$y = y_0 + bt$$

$$z = z_0 + ct$$

En rett linje som går gjennom punktet $Q = (x_0 , y_0 , z_0)$ og har $\vec{v} = [a , b , c]$ som retningsvektor, er gitt ved vektorlikningen $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \vec{v}$
og parameterframstillingen
$x = x_0 + at \quad \wedge \quad y = y_0 + bt \quad \wedge \quad z = z_0 + ct$

Eksempel 1 Parameterframstilling for linjer

En rett linje går gjennom punktet $(4 , 0 , -1)$ og har retningsvektoren $\vec{v} = [-2 , 1 , 3]$.
$[x , y , z] = [4 , 0 , -1] + t \cdot [-2 , 1 , 3]$ er da en vektorlikning for linja.

$$x = 4 - 2t$$

$$y = t$$

$$z = -1 + 3t$$

er en parameterframstilling for linja.

Linja gitt ved parameterframstillingen

$$x = 4s$$
$$y = 2 - 2s$$
$$z = 5 - 6s$$

går gjennom punktet $(0, 2, 5)$ og har $\vec{u} = [4, -2, -6]$ som retningsvektor.
Sammenlikner vi retningsvektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ til de to linjene, ser vi at

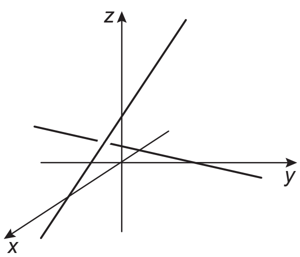
$$\vec{u} = [4, -2, -6] = -2 \cdot [-2, 1, 3] = -2\vec{v}$$

De to linjene er altså parallelle.
Setter vi $t = 2$ i den første parameterframstillingen og $s = 0$ i den andre, ser vi at begge linjene går gjennom $(0, 2, 5)$. De to parameterframstillingene representerer derfor den samme linja.

Oppgave 1.13
Finn en parameterframstilling for en rett linje som går gjennom Q og har retningsvektor $\vec{v}$.
a $Q = (2, -1, 3)$ og $\vec{v} = [0, 1, 4]$
b $Q = (5, 0, -4)$ og $\vec{v} = [2, -4, 1]$

Oppgave 1.14
En rett linje går gjennom punktene A og B. Bestem en parameterframstilling for linja når
a $A = (1, -1, 2)$ og $B = (4, -1, 3)$
b $A = (5, -3, -2)$ og $B = (2, 2, -3)$

Skjæring mellom rette linjer i rommet



Vindskeive linjer

To rette linjer i *planet* er enten parallelle (eventuelt sammenfallende) eller så skjærer de hverandre i ett punkt.
Gjelder dette også i rommet?

I rommet kan to linjer

- være parallelle ved siden av hverandre, eller falle sammen
- skjære hverandre i ett punkt
- være *vindskeive*. Det betyr at de verken er parallelle eller skjærer hverandre.

To linjer er parallelle hvis de har retningsvektorer som er parallelle. Hvis retningsvektorene ikke er parallelle, *kan* linjene ha et felles punkt. Da må det finnes parameterverdier som gjør at x-, y- og z-koordinatene på de to linjene er like.

NB! Når vi har to linjer, må vi bruke to forskjellige parametre, for eksempel s og t.

Eksempel 2 Skjæring mellom to linjer

Vi skal finne eventuelle skjæringspunkter mellom to linjer l og m gitt ved

$$l:\ \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \qquad m:\ \begin{cases} x = -2 + s \\ y = -3 + 2s \\ z = 7 - 2s \end{cases}$$

De to retningsvektorene $[-1, 2, 1]$ og $[1, 2, -2]$ er ikke parallelle. Da er heller ikke linjene parallelle.
For å bestemme hvilke verdier t og s må ha i et eventuelt skjæringspunkt, trenger vi bare to likninger. Vi velger uttrykkene for y og z:

$$1 + 2t = -3 + 2s \quad (1) \qquad\qquad t = 7 - 2s \quad (2)$$

Ved å addere venstresidene for seg og høyresidene for seg står vi igjen med

$$1 + 3t = 4$$

Da blir $t = 1$, og vi setter denne verdien inn i (2) for å bestemme s.
$1 = 7 - 2s$ gir $s = 3$.
Vi har nå funnet at når $t = 1$ og $s = 3$, har l og m samme z-koordinater og samme y-koordinater.

$$y = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \quad \text{og} \quad z = 1$$

Men hvis linjene skal skjære hverandre, må også x-koordinatene være like for $t = 1$ og $s = 3$.
Vi regner ut x-koordinaten for hver av linjene når $t = 1$ og $s = 3$.

$$x = 2 - t = 2 - 1 = 1 \quad \text{og} \quad x = -2 + s = -2 + 3 = 1$$

Linjene l og m har altså punktet $(1, 3, 1)$ felles. De skjærer hverandre i dette punktet.

I eksemplet ovenfor regnet vi ut parameterverdiene (s og t) slik at to av koordinatene stemte overens for de to linjene. Dette gir ingen garanti for at også den tredje koordinaten blir lik for de to linjene. Dette må vi kontrollere, og da er det to muligheter:

- Vi får samme verdi for de to tredjekoordinatene. Da skjærer linjene hverandre.
- Vi får ulike verdier for de to tredjekoordinatene. Da skjærer ikke linjene hverandre. Linjene er da vindskeive (forutsatt at de ikke er parallelle).

Oppgave 1.15
Undersøk om linjene er parallelle. Hvis linjene ikke er parallelle, undersøk om de skjærer hverandre, og finn eventuelt skjæringspunktet.

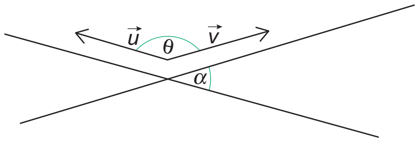
a $\quad x = 2 + t \ \wedge\ y = 1 - t \ \wedge\ z = t$ og $x = 4 \ \wedge\ y = -5 + 2s \ \wedge\ z = s$

b $\quad x = 3 + t \ \wedge\ y = -1 - 3t \ \wedge\ z = 1 - 2t$ og
$\quad x = 4 - 3s \ \wedge\ y = 2 + 9s \ \wedge\ z = 6s$

c $\quad x = 3 + 2t \ \wedge\ y = 2 + 5t \ \wedge\ z = -1 - 2t$ og
$\quad x = -1 + s \ \wedge\ y = 2 + 3s \ \wedge\ z = 4 + 6s$

Vinkelen mellom to linjer i rommet

I rommet definerer vi vinkelen mellom to linjer som den *minste* vinkelen vi må dreie én av linjene om et punkt på linja, for at de skal bli parallelle.
Det betyr at den største vinkelen vi kan ha mellom to linjer, er $90°$.



Når vi kjenner retningsvektorene for to linjer vi skal bestemme vinkelen mellom, regner vi først ut vinkelen mellom disse vektorene. Hvis denne vinkelen er større enn $90°$, slik som vinkelen θ på figuren ovenfor, er $\alpha = 180° - \theta$ den vinkelen vi er ute etter.

Eksempel 3 Vinkelen mellom to linjer

Vi har gitt to linjer,
l: $x = 2t \wedge y = 1 - 2t \wedge z = 2 + t$ og m: $x = 3 - 6t \wedge y = -5 + 2t \wedge z = 3t$
Vi skal finne vinkelen mellom linjene. l har retningsvektoren $\vec{u} = [2, -2, 1]$, og m har retningsvektoren $\vec{v} = [-6, 2, 3]$. Først finner vi vinkelen θ mellom retningsvektorene.

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{[2, -2, 1]\cdot[-6, 2, 3]}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}\cdot\sqrt{(-6)^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{2\cdot(-6) + (-2)\cdot 2 + 1\cdot 3}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{49}} = \frac{-13}{3\cdot 7} = \frac{-13}{21}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-13}{21} = 128°$$

Vinkelen mellom retningsvektorene er $128°$. Da er vinkelen mellom l og m $180° - 128° = 52°$.

Oppgave 1.16

Regn ut vinkelen mellom linjene l og m.

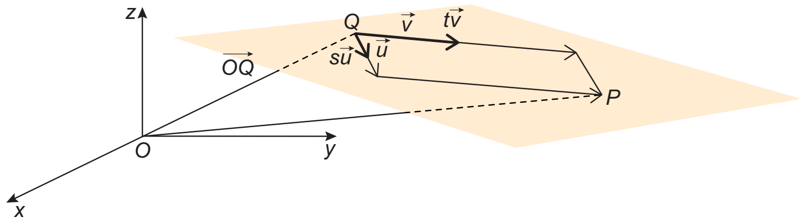
a l har retningsvektoren $[4, 0, 3]$ og
m har retningsvektoren $[4, -5, 0]$

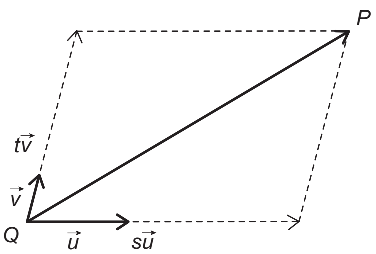
b l: $x = t \wedge y = 3 + 4t \wedge z = 2 + 3t$ og
m: $x = 1 + 2t \wedge y = 5 - t \wedge z = t$

c l: $[x, y, z] = [2, 1, 0] + t\cdot[1, -1, 1]$ og
m: $[x, y, z] = [4, -5, 0] + s\cdot[0, 2, 1]$

Parameterframstilling for et plan

Et plan inneholder et punkt $Q=(x_0, y_0\,, z_0)$. Vektorene $\vec{u}=[a_1\,, b_1\,, c_1]$ og $\vec{v}=[a_2\,, b_2\,, c_2]$ er begge parallelle med planet, men ikke parallelle med hverandre.
Vi lar $P=(x, y\,, z)$ være et vilkårlig punkt i planet.





Da fins det tall s og t slik at $\overrightarrow{QP}=s\cdot\vec{u}+t\cdot\vec{v}$.
Posisjonsvektoren til P kan vi derfor skrive som

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+s\cdot\vec{u}+t\cdot\vec{v}$$

Denne likningen er en vektorlikning for planet.

Med koordinater blir vektorlikningen

$$[x\,, y\,, z]=[x_0\,, y_0\,, z_0]+s\cdot[a_1\,, b_1\,, c_1]+t\cdot[a_2\,, b_2\,, c_2]$$

Parameterframstilling for plan
Et plan som går gjennom punktet $Q=(x_0, y_0\,, z_0)$ og er parallelt med vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$, er gitt ved vektorlikningen

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+s\cdot\vec{u}+t\cdot\vec{v}$$

og parameterframstillingen

$$x=x_0+s\cdot a_1+t\cdot a_2$$

$$y=y_0+s\cdot b_1+t\cdot b_2$$

$$x=z_0+s\cdot c_1+t\cdot c_2$$

Eksempel 4 Parameterframstilling for et plan

Et plan går gjennom punktene $A=(1\,,-1\,,2)$, $B=(4\,,1\,,6)$ og $C=(2\,,2\,,2)$.
Vi skal finne en parameterframstilling for planet.
Vi trenger ett punkt og to vektorer som er parallelle med planet.
Vi velger punktet A, og vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}=[4-1\,, 1-(-1)\,, 6-2]=[3\,, 2\,, 4]$$

$$\overrightarrow{AC}=[2-1\,, 2-(-1)\,, 2-2]=[1\,, 3\,, 0]$$

Vi ser at $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ ikke er parallelle. Det betyr at punktene A, B og C ikke ligger på en rett linje. Da bestemmer de et plan.
Et punkt $P = (x, y, z)$ som ligger i planet, har posisjonsvektoren $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$, der s og t er to parametre.

$$[x, y, z] = [1, -1, 2] + s \cdot [3, 2, 4] + t \cdot [1, 3, 0]$$

Dette gir parameterframstillingen

$$x = 1 + 3s + t$$
$$y = -1 + 2s + 3t$$
$$z = 2 + 4s$$

Oppgave 1.17

Bestem en parameterframstilling for et plan som

a går gjennom $(2, 0, 1)$ og er parallelt med vektorene $[1, -3, 0]$ og $[2, -2, 1]$

b går gjennom $(1, 4, 1)$, $(1, 8, 7)$ og $(6, 3, 5)$

c inneholder linjene $[x, y, z] = [2, 1, 0] + s \cdot [4, 1, 0]$ og $[x, y, z] = [2, 1, 0] + t \cdot [3, 2, 4]$

Sti 1	Sti 2	Sti 3

Stifinner: side 315

1.3 VEKTORPRODUKT

I 1.3 skal du lære å regne ut vektorprodukt og bruke det til å beregne areal og volum.

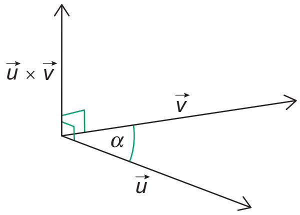
I R1 definerte vi vektoraddisjon, multiplikasjon av vektor med en skalar og skalarprodukt for vektorer i planet. Som vi har sett, kan vi generalisere alle disse vektoroperasjonene til rommet.
I rommet definerer vi i tillegg en vektoroperasjon som vi kaller *vektorprodukt*.
Vektorproduktet av to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er en vektor. Denne vektoren står vinkelrett på både $\vec{u}$ og $\vec{v}$. Det gjør at vektorproduktet får mange nyttige anvendelser.

Vektorproduktet kan ha mange nyttige anvendelser …

Vektorproduktet av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ skriver vi $\vec{u} \times \vec{v}$.

Vektorproduktet av $[x_1, y_1, z_1]$ og $[x_2, y_2, z_2]$ skriver vi $[x_1, y_1, z_1] \times [x_2, y_2, z_2]$.

Vi bruker altså et kryss mellom vektorene når vi skriver et vektorprodukt.
Et annet navn på vektorproduktet er *kryssprodukt*.

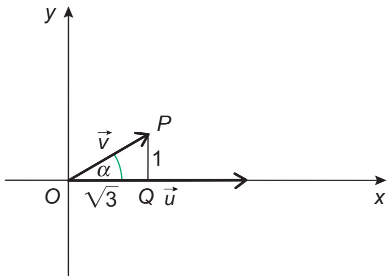


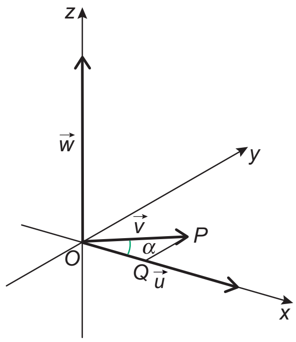
Definisjon på vektorprodukt

- $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$, der α er vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
- $\vec{u} \times \vec{v}$ står vinkelrett på både $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{u} \times \vec{v}$, i denne rekkefølgen, danner et høyrehåndssystem.

Eksempel 1 Vektorprodukt

Vi vil finne vektorproduktet $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ når $\vec{u} = 4\vec{e}_x$ og $\vec{v} = \sqrt{3}\vec{e}_x + \vec{e}_y$.





Både $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle med xy-planet. $\vec{w}$ må derfor være parallell med z-aksen.

Fra trekanten OQP med kateter $\sqrt{3}$ og 1 ser vi at $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Det gir $\alpha = 30°$ og $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.

Med vektorlengdene $|\vec{u}| = 4$ og $|\vec{v}| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$ får vi at $|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha = 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 4$.

Vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ skal danne et høyrehåndssystem, og derfor må vi ha at $\vec{w} = 4\vec{e}_z$.

Eksemplet ovenfor viser ikke hvordan vi vanligvis regner ut et vektorprodukt.
Med vektorkoordinater kan vi skrive vektorproduktet på følgende form:

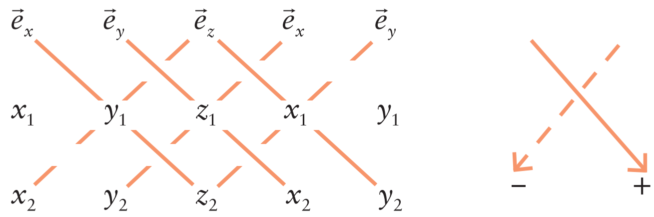
Vektorprodukt på koordinatform

$$[x_1, y_1, z_1] \times [x_2, y_2, z_2]$$

$$= [y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2, z_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot z_2, x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2]$$

Dette viser vi på side 31.

Som et hjelpemiddel når vi skal bruke denne noe kronglete formelen, kan vi sette opp følgende skjema:



Her multipliserer vi faktorer på skrå nedover mot høyre og setter pluss foran:

$$\vec{e}_x \cdot y_1 \cdot z_2 + \vec{e}_y \cdot z_1 \cdot x_2 + \vec{e}_z \cdot x_1 \cdot y_2 \qquad (1)$$

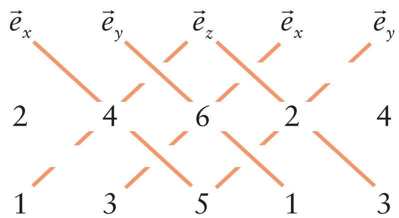
Tilsvarende multipliserer vi faktorer nedover på skrå mot venstre, men da setter vi minustegn foran:

$$-\vec{e}_x \cdot z_1 \cdot y_2 - \vec{e}_y \cdot x_1 \cdot z_2 - \vec{e}_z \cdot y_1 \cdot x_2 \qquad (2)$$

Alle disse leddene skal adderes.

Eksempel 2 Vektorprodukt

Vi skal regne ut $[2, 4, 6] \times [1, 3, 5]$.
Vi setter opp skjemaet med enhetsvektorene øverst.
Deretter en linje med koordinatene til den første vektoren, og til slutt en linje med koordinatene til den andre vektoren.



Vi får $\vec{e}_x \cdot (4 \cdot 5 - 6 \cdot 3) + \vec{e}_y \cdot (6 \cdot 1 - 2 \cdot 5) + \vec{e}_z \cdot (2 \cdot 3 - 4 \cdot 1)$

$$= \vec{e}_x \cdot (20 - 18) + \vec{e}_y \cdot (6 - 10) + \vec{e}_z \cdot (6 - 4)$$

$$= 2\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$$

Altså har vi at $[2, 4, 6] \times [1, 3, 5] = [2, -4, 2]$.

I eksemplet ovenfor fikk vi at $[2, 4, 6] \times [1, 3, 5] = [2, -4, 2]$.
Vi setter $\vec{u} = [2, 4, 6]$, $\vec{v} = [1, 3, 5]$ og $\vec{w} = [2, -4, 2]$.
Vi skal kontrollere om $\vec{w}$ virkelig står vinkelrett på $\vec{u}$ og $\vec{v}$, slik definisjonen på side 27 krever.
Det kan vi gjøre ved å regne ut skalarproduktene $\vec{u} \cdot \vec{w}$ og $\vec{v} \cdot \vec{w}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = [2, 4, 6] \cdot [2, -4, 2] = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-4) + 6 \cdot 2$$
$$= 4 - 16 + 12 = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = [1, 3, 5] \cdot [2, -4, 2] = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) + 5 \cdot 2$$
$$= 2 - 12 + 10 = 0$$

$\vec{w}$ står altså vinkelrett på både $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Oppgave 1.18

Regn ut vektorproduktene.

a $[2,1,0]\times[1,4,1]$
b $[0,1,-2]\times[3,-1,1]$
c $[1,2,4]\times[3,5,6]$
d $[3,-1,-2]\times[2,-4,1]$
e $[3,-1,-3]\times[-1,4,-1]$
f $[6,3,-2]\times[5,-1,-2]$

Oppgave 1.19

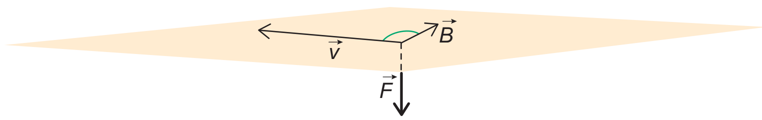
Regn ut vektorproduktene.

a $\vec{e}_x\times\vec{e}_x$
b $\vec{e}_x\times\vec{e}_y$
c $\vec{e}_y\times\vec{e}_z$
d $\vec{e}_z\times\vec{e}_x$
e $\vec{e}_y\times\vec{e}_x$
f $\vec{e}_z\times\vec{e}_y$

Eksempel 3 Vektorprodukt og magnetisk kraft

I fysikkfaget kan vi bruke vektorprodukt til å skrive sammenhengen mellom den magnetiske kraften $\vec{F}$ på en partikkel med ladning q, når partikkelen beveger seg med farten $\vec{v}$ i et magnetfelt med styrke $\vec{B}$.

$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$$



Formelen viser både hvor stor kraften er, og hvilken retning den har.
Figuren viser kraften på en partikkel med positiv ladning q.

Hvor stor er den magnetiske kraften på en ladd partikkel som beveger seg i *samme* retning som magnetfeltet har?

Eksempel 4 Vektorprodukt med digitalt verktøy

Mange digitale verktøy kan regne ut vektorprodukter. Med kommandoen

crossP $([2,1,-4],[3,5,1])$

gir for eksempel TI-*n*spire vektoren $[21,-14,7]$.

Og crossP $([a,1,-4],[3,5,1])$ gir $[21,-a-12,5a-3]$.

Hvis ditt digitale verktøy ikke har noen tilsvarende kommando, kan du lage et enkelt program for utregning av vektorprodukt. (Se nettstedet på Lokus.)

Egenskaper ved vektorproduktet

Både for vanlig multiplikasjon med tall og for skalarprodukt er rekkefølgen av «faktorene» likegyldig.

$$a\cdot b=b\cdot a$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$$

På grunn av høyrehåndsregelen gjelder dette ikke for vektorproduktet.
For eksempel er $\vec{e}_x\times\vec{e}_y=\vec{e}_z$ mens $\vec{e}_y\times\vec{e}_x=-\vec{e}_z$.

Regneregler for vektorprodukt

- $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$
- $(k\vec{u})\times\vec{v} = \vec{u}\times(k\vec{v}) = k(\vec{u}\times\vec{v})$
- $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w}$
- $\vec{v}\times\vec{v} = \vec{0}$

Fra definisjonen på side 27 får vi at $|\vec{u}\times\vec{v}| = 0$ hvis vinkelen mellom vektorene er $\alpha = 0°$ eller $\alpha = 180°$. Det gir følgende resultat:

Parallelle vektorer
For $\vec{u} \neq \vec{0}$ og $\vec{v} \neq \vec{0}$ gjelder
$\vec{u} \parallel \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}$

I stedet for oppstillingen på side 28 kan du bruke regnereglene øverst på siden når du skal regne ut et vektorprodukt. Vær da oppmerksom på at $\vec{u}\times\vec{v} \neq \vec{v}\times\vec{u}$!

Stiller vi opp de ortogonale enhetsvektorene i rekkefølgen $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, vil hver sekvens av tre vektorer utgjøre et høyrehåndssystem.
Kryssproduktet av to nabovektorer, lest fra venstre, blir derfor den neste vektoren.
For eksempel er $\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$.
Da vet vi også at $\vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y$.
Men kryssproduktet av parallelle vektorer er nullvektor:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}$$

Eksempel 5 Regneregler for vektorprodukt

Vi skal regne ut $[2, 1, -3]\times[4, 0, 1]$ ved å bruke regnereglene øverst på siden.
Da skriver vi $(2\vec{e}_x + \vec{e}_y - 3\vec{e}_z)$ i stedet for $[2, 1, -3]$, og $(4\vec{e}_x + \vec{e}_z)$ i stedet for $[4, 0, 1]$.
Merk deg at $2\vec{e}_x \times 4\vec{e}_x = 8\vec{e}_x \times \vec{e}_x = 8\cdot\vec{0} = \vec{0}$, og at $\vec{0} + 3\cdot(-\vec{e}_x) = \vec{0} - 3\vec{e}_x = -3\vec{e}_x$.

Husk at ved multiplikasjon av to parenteser skal hvert ledd i den ene parentesen multipliseres med hvert ledd i den andre.
Vi får

$$(2\vec{e}_x + \vec{e}_y - 3\vec{e}_z)\times(4\vec{e}_x + \vec{e}_z) = 8\vec{e}_x\times\vec{e}_x + 2\vec{e}_x\times\vec{e}_z + 4\vec{e}_y\times\vec{e}_x + \vec{e}_y\times\vec{e}_z - 12\vec{e}_z\times\vec{e}_x - 3\vec{e}_z\times\vec{e}_z$$

$$= 8\cdot\vec{0} + 2\cdot(-\vec{e}_y) + 4\cdot(-\vec{e}_z) + \vec{e}_x - 12\vec{e}_y - 3\cdot\vec{0}$$

$$= -2\vec{e}_y - 4\vec{e}_z + \vec{e}_x - 12\vec{e}_y$$

$$= \vec{e}_x - 14\vec{e}_y - 4\vec{e}_z$$

Da har vi altså at $[2, 1, -3]\times[4, 0, 1] = [1, -14, -4]$.

Ved å bruke framgangsmåten i eksempel 5 på $\vec{u} = [x_1 , y_1 , z_1]$ og $\vec{v} = [x_2 , y_2 , z_2]$ får vi

$$
\begin{aligned}
&\vec{u} \times \vec{v} \\
&= (x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z) \times (x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y + z_2\vec{e}_z) \\
&= x_1\vec{e}_x \times x_2\vec{e}_x + x_1\vec{e}_x \times y_2\vec{e}_y + x_1\vec{e}_x \times z_2\vec{e}_z + y_1\vec{e}_y \times x_2\vec{e}_x \\
&\quad + y_1\vec{e}_y \times y_2\vec{e}_y + y_1\vec{e}_y \times z_2\vec{e}_z + z_1\vec{e}_z \times x_2\vec{e}_x + z_1\vec{e}_y \times y_2\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z \times z_2\vec{e}_z \\
&= x_1y_2\vec{e}_x \times \vec{e}_y + x_1z_2\vec{e}_x \times \vec{e}_z + y_1x_2\vec{e}_y \times \vec{e}_x \\
&\quad + y_1z_2\vec{e}_y \times \vec{e}_z + z_1x_2\vec{e}_z \times \vec{e}_x + z_1y_2\vec{e}_z \times \vec{e}_y \\
&= x_1y_2\vec{e}_z + x_1z_2 \cdot (-\vec{e}_y) + y_1x_2 \cdot (-\vec{e}_z) + y_1z_2\vec{e}_x + z_1x_2\vec{e}_y + z_1y_2 \cdot (-\vec{e}_x) \\
&= (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{e}_x + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{e}_y + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{e}_z \\
&= [y_1z_2 - z_1y_2 , z_1x_2 - x_1z_2 , x_1y_2 - y_1x_2]
\end{aligned}
$$

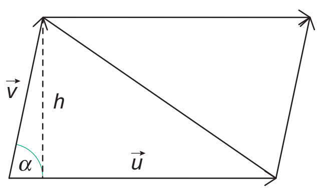
Dermed har vi vist hvordan vi kommer fram til formelen for utregning av vektorproduktet på side 27. Bevis for regneregelen $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ finner du på nettstedet på Lokus.

Oppgave 1.20

Bruk metoden i eksempel 5 og regn ut.

a $2\vec{e}_y \times (\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 4\vec{e}_z)$ **b** $[3, -1, 0] \times [2, 0, 5]$

Vektorprodukt og areal



Vi lar $\vec{u}$ og $\vec{v}$ tegnet ut fra samme hjørne være sider i et parallellogram. Vi sier at parallellogrammet er *utspent* av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

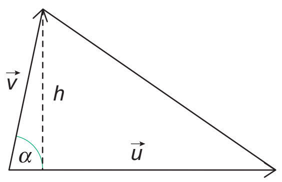
Arealet av parallellogrammet er $G = |\vec{u}| \cdot h$.

Høyden i trekanten er $h = |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$.

Det gir $G = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$.

Dette viser at

$$G = |\vec{u} \times \vec{v}|$$



Trekanten utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ har et areal som er halvparten så stort.

$$G = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$$

Areal av trekant og parallellogram
Arealet av parallellogrammet utspent av vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er
$G = |\vec{u} \times \vec{v}|$

Arealet av trekanten utspent av vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er
$G = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$

Eksempel 6 Areal av trekant

Hjørnene i en trekant har koordinatene $A = (2, 5, 0)$, $B = (7, 1, 3)$ og $C = (4, 8, 1)$.
Vi skal regne ut arealet av trekanten.
Vi finner først to vektorer som utspenner trekanten, for eksempel $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = [7-2, 1-5, 3-0] = [5, -4, 3]$$

$$\overrightarrow{AC} = [4-2, 8-5, 1-0] = [2, 3, 1]$$

Så regner vi ut $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$[5, -4, 3] \times [2, 3, 1] = [-4 \cdot 1 - 3 \cdot 3, 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1, 5 \cdot 3 - (-4) \cdot 2] = [-13, 1, 23]$$

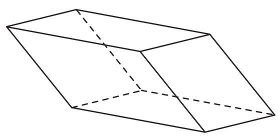
$$G = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-13)^2 + 1^2 + 23^2} = \frac{1}{2}\sqrt{699} = 13,2$$

Arealet av trekanten er 13,2.

Oppgave 1.21
Regn ut $|\vec{u}\times\vec{v}|$ når
a $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=5$ og vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er 30°
b $|\vec{u}|=6$, $|\vec{v}|=11$ og vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er 135°

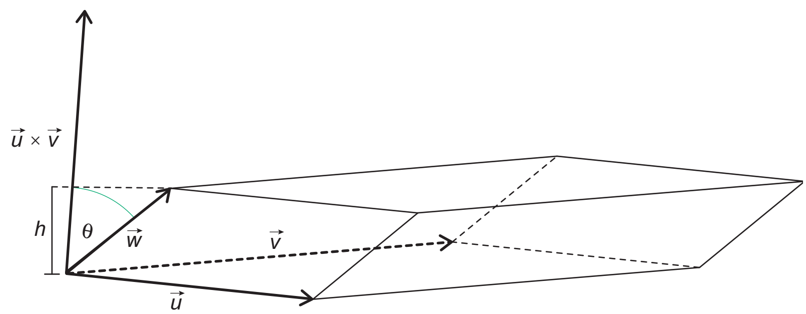
Oppgave 1.22
a Regn ut arealet av parallellogrammet utspent av vektorene $\vec{u}=[1,0,2]$ og $\vec{v}=[-2,2,3]$.
b Regn ut arealet av trekanten utspent av $\vec{u}=[0,-1,2]$ og $\vec{v}=[3,1,0]$.
c Regn ut arealet av trekant ABC når $A=(1,0,0)$, $B=(-3,1,4)$ og $C=(2,-1,5)$.

Volumprodukt



Ved hjelp av vektor- og skalarprodukt kan vi regne ut volumet av ulike romfigurer. Vi starter med *parallellepipedet*. Det er en romfigur som er begrenset av seks parvis parallelle plan. Sideflatene er parvis kongruente parallellogrammer.
Hvis sideflatene er rektangler, har vi et rettvinklet parallellepiped, og hvis sideflatene er kvadrater, er parallellepipedet en kube (en terning).

Når tre vektorer ikke ligger i samme plan, definerer de et parallellepiped.



Parallellepipedet på figuren er definert av $\vec{u}, \vec{v}$ og $\vec{w}$.
Hver sideflate i romfiguren er et parallellogram. Da kan vi bestemme arealet av sideflatene ved hjelp av vektorprodukt.

Volumet av et parallellepiped er den valgte grunnflaten multiplisert med den tilhørende høyden.
Vi lar parallellogrammet utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ være grunnflaten G. Den har arealet $|\vec{u}\times\vec{v}|$.
Vektoren $\vec{u}\times\vec{v}$ står vinkelrett på grunnflaten. Høyden h i parallellepipedet er da lik lengden av komponenten til $\vec{w}$ langs $\vec{u}\times\vec{v}$.

$$h=|\vec{w}|\cdot\cos\theta$$

For volumet V får vi

$$V=G\cdot h=|\vec{u}\times\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos\theta$$

Av definisjonen på skalarprodukt har vi

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = |\vec{u}\times\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos\theta$$

Uttrykket for V kan derfor skrives $V = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$.

Vi kan altså finne volumet av et parallellepiped ved først å regne ut vektorproduktet av to vektorer, og så ta skalarproduktet av svaret og den tredje vektoren.
Hvis vinkelen mellom vektorene i skalarproduktet ($\vec{u}\times\vec{v}$ og $\vec{w}$) er større enn $90°$, blir $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$ negativ. Da er volumet lik absoluttverdien av $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$.

Da det ikke spiller noen rolle hvilken sideflate vi velger som grunnflate, spiller det ikke noen rolle hvilke to vektorer vi bruker i vektorproduktet.

Volum av parallellepiped
Volumet av et parallellepiped utspent av vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er
$V = |(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}| = |\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})| = |\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w})|$

Parentesene i uttrykkene ovenfor er egentlig ikke nødvendige, for $\vec{u}\times(\vec{v}\cdot\vec{w})$ har ikke mening.
Her er parentesen en skalar, men kryssproduktet er definert for to vektorer. Derfor vet vi at $\vec{u}\times\vec{v}\cdot\vec{w}$ må bety $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$. Men for å være tydelig skriver vi parenteser rundt vektorproduktet likevel.

«Produktet» $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$, som involverer tre vektorer, kaller vi *volumprodukt* eller *trippelprodukt*.

Eksempel 7 Volum av parallellepiped

Et parallellepiped er utspent av vektorene $\vec{u} = [5, 1, 3]$, $\vec{v} = [3, 0, 1]$ og $\vec{w} = [0, 2, 3]$.
Vi skal bruke volumproduktet til å finne volumet av parallellepipedet.
Vi velger å regne ut $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$.
Først finner vi vektorproduktet:

$$\vec{v}\times\vec{w} = [3, 0, 1]\times[0, 2, 3] = [0\cdot 3 - 1\cdot 2, 1\cdot 0 - 3\cdot 3, 3\cdot 2 - 0\cdot 0] = [-2, -9, 6]$$

Av dette får vi at

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = [5, 1, 3]\cdot[-2, -9, 6] = 5\cdot(-2) + 1\cdot(-9) + 3\cdot 6 = -10 - 9 + 18 = -1$$

Her er volumproduktet negativt, og vi tar absoluttverdien for å finne volumet.

$$|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})| = |-1| = 1$$

Volumet av parallellepipedet er altså 1.

Oppgave 1.23

Bruk volumprodukt til å regne ut volumet av parallellepipedet utspent av $\vec{u}, \vec{v}$ og $\vec{w}$.

a $\vec{u} = [0, 0, 4]$, $\vec{v} = [3, 0, 0]$ og $\vec{w} = [0, 2, 0]$

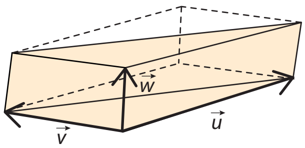
b $\vec{u} = [1, 1, 4]$, $\vec{v} = [2, 2, 1]$ og $\vec{w} = [4, 2, 3]$

c $\vec{u} = [3, -1, -2]$, $\vec{v} = [-5, 0, 8]$ og $\vec{w} = [6, -4, 7]$

Oppgave 1.24

Hva kan du si om $\vec{u}, \vec{v}$ og $\vec{w}$ dersom $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$?

Hvis vi deler et parallellepiped i to like deler, får vi trekantede prismer.



Hvert av prismene på figuren har volumet $V = \frac{1}{2}|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$.

En pyramide utspent av tre vektorer, kan ha trekantet eller firkantet grunnflate.

Volumet V av en pyramide med grunnflate G og høyde h er gitt ved $V = \dfrac{G \cdot h}{3}$.

Hvis vi velger trekanten utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ som grunnflate for pyramiden til venstre, er $G = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$.

Volumet blir da $V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| = \frac{1}{6}|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$.

Louvre i Paris

Eksempel 8 Volum av et tetraeder

Et tetraeder har hjørner i $A=(1,-1,2)$, $B=(4,1,6)$, $C=(2,2,2)$ og $D=(3,0,-2)$.
Vi velger å ta utgangspunkt i hjørnet A og finner de tre vektorene ut fra dette hjørnet.

$$\overrightarrow{AB}=[4-1,1-(-1),6-2]=[3,2,4]$$

$$\overrightarrow{AC}=[2-1,2-(-1),2-2]=[1,3,0]$$

$$\overrightarrow{AD}=[3-1,0-(-1),-2-2]=[2,1,-4]$$

Vektorrekkefølgen i volumproduktet er likegyldig, og vi setter $V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\right|$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=[3,2,4]\times[1,3,0]=[2\cdot 0-4\cdot 3,4\cdot 1-3\cdot 0,3\cdot 3-2\cdot 1]=[-12,4,7]$$

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=[-12,4,7]\cdot[2,1,-4]=-12\cdot 2+4\cdot 1+7\cdot(-4)=-24+4-28=-48$$

$$V=\frac{1}{6}|-48|=\frac{48}{6}=8$$

Volumet av tetraedret er altså 8.

I et tetraeder er det likegyldig hvilken sideflate vi velger som grunnflate. Vi kan derfor velge fritt hvilke vektorer vi skal regne kryssprodukt av.

For pyramiden med firkantet grunnflate er $G=|\vec{u}\times\vec{v}|$, og volumet er dermed $V=\frac{1}{3}|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}|$.

NB! I volumformelen for den firkantede pyramiden må vi regne vektorproduktet av de to vektorene som utspenner grunnflaten.

Hva blir volumproduktet $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$ hvis $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ ligger i samme plan?
Hva kan du si om punktene A, B, C og D hvis $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=0$?

Punkter i samme plan
Punktene A, B, C og D ligger i samme plan

$$\Updownarrow$$

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=0$$

Oppgave 1.25
Regn ut volumet av
- **a** trekantprismet der $\vec{u}=[0\,,0\,,4]$ og $\vec{v}=[3\,,0\,,0]$ utspenner grunnflaten og $\vec{w}=[0\,,2\,,0]$ er en sidekant
- **b** en firkantet pyramide, der $\vec{u}=[0\,,3\,,4]$ og $\vec{v}=[1\,,-2\,,2]$ utspenner grunnflaten, og $\vec{w}=[-2\,,5\,,3]$ er en sidekant
- **c** et tetraeder med $O=(0\,,0\,,0)$, $P=(3\,,-1\,,-2)$, $Q=(6\,,2\,,-1)$ og $R=(5\,,10\,,0)$ som hjørner

Oppgave 1.26
Undersøk om punktene ligger i samme plan.
- **a** $O=(0\,,0\,,0)$, $P=(1\,,-1\,,-1)$, $Q=(4\,,-2\,,3)$ og $R=(-2\,,-4\,,0)$
- **b** $A=(2\,,0\,,1)$, $B=(4\,,-1\,,0)$, $C=(4\,,2\,,3)$ og $D=(6\,,-5\,,-4)$

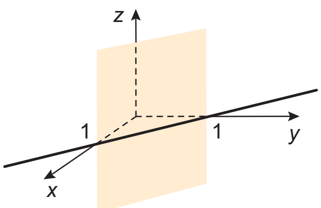
Sti 1	Sti 2	Sti 3

Stifinner: side 317

1.4 PLAN

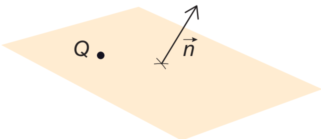
I 1.4 skal du lære å finne likningen for et plan og finne vinkelen mellom to plan.

I planet er $x+y=1$ likningen for en rett linje som går gjennom punktene $(0\,,1)$ og $(1\,,0)$. I rommet vil punktene $(1\,,0\,,0)$ og $(0\,,1\,,0)$ passe i likningen. Men punktene $(1\,,0\,,z)$ og $(0\,,1\,,z)$ vil også passe i likningen for alle z-verdier!
Det betyr at i rommet er $x+y=1$ likningen for et plan som er parallelt med z-aksen, og som inneholder linja gjennom $(1\,,0\,,0)$ og $(0\,,1\,,0)$.



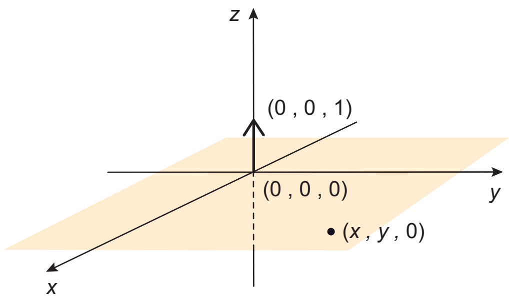
Likningen for et plan

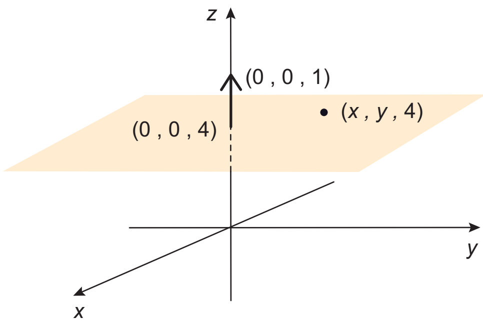
Et plan er bestemt av tre punkter som ikke ligger på en rett linje. Med tre slike punkter kan vi bestemme to vektorer i planet, som vi gjorde i underkapittel 1.2. Men vi kan også bestemme en vektor som står vinkelrett på planet. En slik vektor kaller vi en *normalvektor* til planet.
Normalvektoren til et plan står vinkelrett på alle linjer som ligger i planet.
Et plan er bestemt av ett punkt i planet og én normalvektor.
Det spiller ingen rolle hvor lang en normalvektor er. Den skal bare vise hvilken orientering planet har.



Eksempel 1 Plan bestemt av ett punkt og en normalvektor

xy-planet går gjennom origo, og enhver vektor som er parallell med z-aksen, står vinkelrett på dette planet. Planet er derfor entydig bestemt av punktet $(0\,,0\,,0)$ og vektoren $[0\,,0\,,1]$. Et plan som er parallelt med xy-planet og skjærer z-aksen i $(0\,,0\,,4)$, er bestemt av dette punktet og vektoren $[0\,,0\,,1]$.

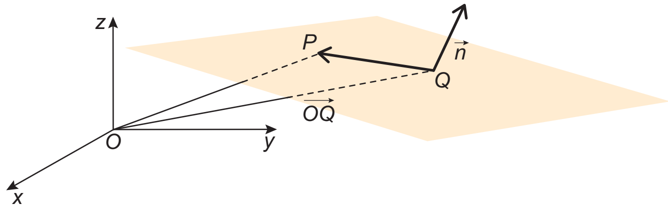




Alle punkter i xy-planet har z-koordinat lik null. Dette planet har derfor likningen $z=0$.
x- og y-koordinatene kan være alle reelle tall.
Tilsvarende har det siste planet i eksemplet ovenfor likningen $z=4$.
Vi kan også skrive $0x+0y+z=4$.
Koeffisientene 0, 0 og 1 foran x, y og z finner vi igjen i normalvektoren til planet, som er $[0\,,0\,,1]$.

Nå skal vi se hvordan vi generelt finner likningen for et plan når vi kjenner ett punkt og én normalvektor til planet.

Et plan går gjennom $Q=(x_0\,,y_0\,,z_0)$ og har $\vec{n}=[a\,,b\,,c]$ som normalvektor. Se figuren på neste side.
Vi lar $P=(x\,,y\,,z)$ være et punkt i planet.



Uansett hvor P ligger i planet, så er $\overrightarrow{QP}$ vinkelrett på $\vec{n}$. Det gir

$$\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n} = 0$$

Vi skriver $\overrightarrow{QP}$ ved hjelp av posisjonsvektorene for Q og P:

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$$

$$(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}) \cdot \vec{n} = 0 \qquad (1)$$

Denne likningen kan vi også skrive $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{OQ} \cdot \vec{n}$,
som er vektorformen av likningen for planet.
Setter vi inn vektorkoordinater i (1), får vi

$$([x, y, z] - [x_0, y_0, z_0]) \cdot [a, b, c] = 0$$

$$[x - x_0, y - y_0, z - z_0] \cdot [a, b, c] = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad (2)$$

Likningen for et plan
$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ er likning for et plan som går gjennom $Q = (x_0, y_0, z_0)$ og har normalvektor $\vec{n} = [a, b, c]$.

Normalvektoren til et plan er ikke entydig. Vi kan også bruke $[2a, 2b, 2c]$, eller en hvilken som helst annen vektor (forskjellig fra $\vec{0}$) som er parallell med $[a, b, c]$.

Når vi multipliserer ut parentesene i (2), får vi en likning på formen $ax + by + cz + d = 0$, der $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.
Likningen for et plan er vanligvis gitt på denne formen.

Eksempel 2 Likning for et plan

Vi skal finne likningen for et plan som går gjennom punktet $(1, 0, 3)$ og har $[3, -2, 1]$ som normalvektor.
Vi setter inn i likningen $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

$a = 3$, $b = -2$, $c = 1$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ og $z_0 = 3$:

$$3(x - 1) - 2(y - 0) + 1(z - 3) = 0$$

$$3x - 3 - 2y + z - 3 = 0$$

$$3x - 2y + z - 6 = 0$$

Oppgave 1.27
Bestem likningen for et plan som går gjennom P og har normalvektoren $\vec{n}$.

a $P=(3,2,-2)$ og $\vec{n}=[1,5,-2]$
b $P=(0,4,-1)$ og $\vec{n}=[2,5,-4]$
c $P=(-13,-2,15)$ og $\vec{n}=[3,0,-1]$

Tre punkter, som ikke alle ligger på en rett linje, bestemmer et plan. Når vi skal finne likningen for planet, finner vi først to vektorer mellom par av punkter. Deretter kan vi finne en normalvektor til planet ved hjelp av kryssprodukt.
Dersom A, B og C er punkter i et plan, er $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ en normalvektor for planet. Og da kan vi bruke metoden med ett punkt og en normalvektor.

Eksempel 3 Likning for et plan gitt ved tre punkter

Et plan er gitt ved de tre punktene $A=(2,4,1)$, $B=(4,1,2)$ og $C=(6,4,0)$. Vi skal finne likningen for planet.
$\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ er parallelle med planet, og $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ er da en normalvektor for planet.

$$\overrightarrow{AB}=[4-2,1-4,2-1]=[2,-3,1]$$

$$\overrightarrow{AC}=[6-2,4-4,0-1]=[4,0,-1]$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=[2,-3,1]\times[4,0,-1]=[-3\cdot(-1)-1\cdot 0,\ 1\cdot 4-2\cdot(-1),\ 2\cdot 0-(-3)\cdot 4]$$

$$=[3,6,12]=3\cdot[1,2,4]$$

Siden vektoren $[1,2,4]$ er parallell med $[3,6,12]$, kan vi bruke den som normalvektor: $\vec{n}=[1,2,4]$.
Vi velger $(x_0, y_0, z_0)=(2,4,1)$ og setter inn i 2.

$$1(x-2)+2(y-4)+4(z-1)=0$$

$$x-2+2y-8+4z-4=0$$

$$x+2y+4z-14=0$$

Likningen for planet gjennom A, B og C er altså $x+2y+4z-14=0$.

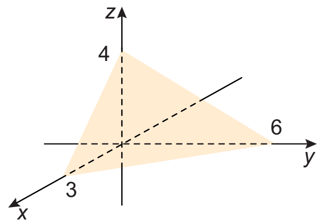
Oppgave 1.28
Finn likningen for et plan som

a går gjennom $A=(0,0,0)$, $B=(2,2,1)$ og $C=(3,-3,2)$
b går gjennom $A=(-2,5,1)$, $B=(4,4,0)$ og $C=(0,-2,2)$
c skjærer x-aksen for $x=3$, y-aksen for $y=-2$ og z-aksen for $z=4$

For å finne hvordan et plan ligger i koordinatsystemet, kan det være lurt å regne ut hvor planet skjærer koordinataksene.
Vi viser dette i eksempel 4.

Eksempel 4 Skjæring med aksene

Vi ønsker å skissere hvordan planet $4x+2y+3z-12=0$ ligger i et koordinatsystem.
Vi finner skjæringspunktet med x-aksen ved å sette $y=0$ og $z=0$. Det gir $x=3$.
Planet skjærer y-aksen for $y=6$ og z-aksen for $z=4$.
Vis dette!



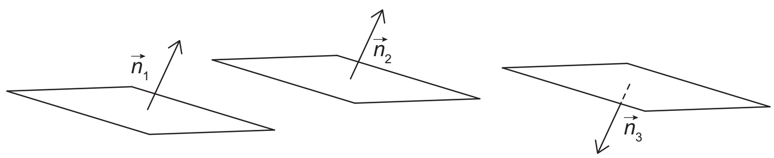
Eksempel 5 Plan parallelt med en akse

Planet med likningen $3x+2y-12=0$ har normalvektoren $\vec{n}=[3,2,0]$. Denne vektoren har ingen komponent i z-retningen. Normalvektoren står *vinkelrett* på z-aksen, $[3,2,0]\perp[0,0,1]$. Det viser at planet er *parallelt* med z-aksen.
Planet skjærer x-aksen for $x=4$ og y-aksen for $y=6$, men setter vi $x=0$ og $y=0$, finner vi ingen z-verdi som passer i likningen. Planet faller ikke sammen med z-aksen.

Oppgave 1.29
Bestem eventuelle akser som planet er parallelt med når planet er gitt ved
a $2x-z+3=0$ b $y+z=0$ c $y-3=0$

Parallelle plan og ikke-parallelle plan

Hvis to plan ikke er parallelle, så skjærer de hverandre langs en rett linje.
Ved å sammenlikne normalvektorene til to plan kan vi avgjøre om planene er parallelle. Vi kan også bestemme vinkelen mellom planene ved hjelp av normalvektorene.



Eksempel 6 Parallelle plan?

Likningene til to plan Π og Σ er $4x-12y+16z=18$ og $-x+3y-4z=6$.
Av likningene ser vi at $[4,-12,16]$ er en normalvektor for Π, og at $[-1,3,-4]$ er en normalvektor for Σ.

$$[4,-12,16]=-4\cdot[-1,3,-4]$$

De to normalvektorene er altså parallelle. Da er Π og Σ parallelle plan.

Oppgave 1.30

Hvilke plan er parallelle?

I: $2x + y - z + 3 = 0$ II: $16x + 8y + 4z - 3 = 0$

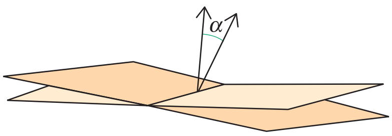
III: $4x + 2y + z - 3 = 0$ IV: $-2x - y + z = 0$

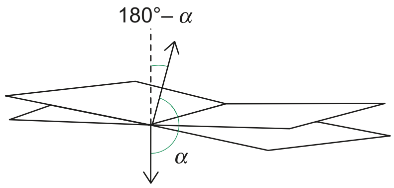
Vinkel mellom plan

Vi lar α være vinkelen mellom normalvektorene til to plan Π og Σ. Hvis $0° \leq \alpha \leq 90°$, er α vinkelen mellom Π og Σ. Se figuren til venstre.

Hvis $90° < \alpha \leq 180°$, er $180° - \alpha$ vinkelen mellom Π og Σ. Se figuren til høyre.

Ved bruk av skalarproduktet finner vi først vinkelen α mellom normalvektorene til planene.





NB! Vinkelen mellom to vektorer ligger i intervallet $[0°, 180°]$.
Vinkelen mellom to plan ligger i intervallet $[0°, 90°]$.

Eksempel 7 Vinkel mellom to plan

Vi skal finne vinkelen mellom to plan $\Pi: \; x-2y+2z=5$ og $\Sigma: \; 4y-3z=1$.
Π og Σ har normalvektorene $\vec{n}_\Pi = [1,-2,2]$ og $\vec{n}_\Sigma = [0,4,-3]$.
Vinkelen θ mellom normalvektorene er gitt ved

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}_\Pi \cdot \vec{n}_\Sigma}{|\vec{n}_\Pi| \cdot |\vec{n}_\Sigma|} = \frac{[1,-2,2]\cdot[0,4,-3]}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\cdot\sqrt{0^2+4^2+(-3)^2}} = \frac{1\cdot 0 - 2\cdot 4 + 2\cdot(-3)}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{25}} = \frac{-14}{15}$$

$$\theta = \cos^{-1}(-\frac{14}{15}) = 159°$$

Vinkelen mellom planene er da $180° - \theta = 180° - 159° = 21°$.

Sti 1	Sti 2	Sti 3

Stifinner: side 319

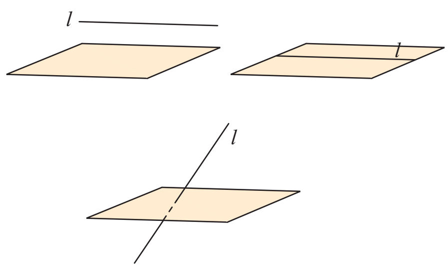
Oppgave 1.31
Finn vinkelen mellom planene.
a $4x-12y+3z=20$ og $x-4y+z=5$
b $2x-3z=1$ og $4y+3z=1$

1.5 MER OM PLAN OG LINJER

I 1.5 skal du lære å finne skjæring mellom to plan og finne skjæring og vinkel mellom plan og linjer.

Skjæring mellom plan og linje

Hvordan må en linje gå for at den skal skjære et plan? Hvor mange fellespunkter kan en linje og et plan ha?



Figuren viser hvordan en linje kan ligge i forhold til et plan. Hvordan kan vi avgjøre om en linje er parallell med et plan?
NB! Alle linjer i et plan står vinkelrett på normalvektoren til planet.

Hvis en linje er parallell med et plan, står den vinkelrett på normalvektoren til planet.
Når et plan og en linje er parallelle, er det tilstrekkelig å undersøke om minst ett punkt på linja også ligger i planet, for å fastslå om linja ligger *i* planet eller *utenfor* planet.

Når vi kjenner en parameterframstilling for en linje, er hver av koordinatene x, y og z uttrykt ved én parameter.
Setter vi disse uttrykkene inn i likningen for planet, får vi en likning der bare parameteren er ukjent. Denne likningen kan vi løse og finne parameterverdien i skjæringspunktet.

Eksempel 1 Skjæringspunkt mellom plan og linje?

Vi skal bestemme eventuelle skjæringspunkter mellom planet $3x - 2y + z - 5 = 0$ og linja $x = 1 + t \quad \wedge \quad y = 2t \quad \wedge \quad z = 6 - t$.
For alle verdier av t ligger punktet $(1 + t\,, 2t\,, 6 - t)$ på linja. Hvis dette punktet også skal ligge i planet, må koordinatene $1 + t$, $2t$ og $6 - t$ passe i likningen for planet:

$$
\begin{aligned}
3 \cdot (1 + t) - 2 \cdot 2t + 6 - t - 5 &= 0 \\
3 + 3t - 4t + 6 - t - 5 &= 0 \\
-2t &= -4 \\
t &= 2
\end{aligned}
$$

Dette viser at punktet $(1 + t\,, 2t\,, 6 - t)$ ligger i planet når $t = 2$.

Så setter vi parameterverdien inn i parameterframstillingen.

$$x = 1 + 2 = 3 \quad \wedge \quad y = 2 \cdot 2 = 4 \quad \wedge \quad z = 6 - 2 = 4$$

Skjæringspunktet har altså koordinatene $(3\,, 4\,, 4)$.

I eksemplet ovenfor resulterte innsetting av x-, y- og z-uttrykkene i planlikningen i én løsning for parameteren t. Linja og planet har derfor bare ett felles punkt.

Eksempel 2 Fellespunkt mellom plan og linje?

Vi skal finne eventuelle fellespunkter mellom linja l gitt ved $x = t \;\wedge\; y = 4 + 2t \;\wedge\; z = -1 - t$ og planet $3x - 2y - z + 3 = 0$.
Punktet $(t\,, 4 + 2t\,, -1 - t)$ ligger på l, og vi setter koordinatene inn i likningen for planet.

$$
\begin{aligned}
3t - 2(4 + 2t) - (-1 - t) + 3 &= 0 \\
3t - 8 - 4t + 1 + t + 3 &= 0 \\
0t &= 4
\end{aligned}
$$

Denne likningen har ikke noen løsning. Det betyr at linja og planet ikke har noen felles punkter.
l er parallell med planet og ligger utenfor planet.

Eksempel 3 Linje parallell med plan?

Vi skal finne eventuelle skjæringspunkter mellom linja m gitt ved
$x = 1 + t \ \wedge \ y = 2t \ \wedge \ z = 6 - t$ og planet $3x - 2y - z + 3 = 0$.

Punktet $(1 + t\ , 2t\ , 6 - t)$ ligger på m. Vi setter koordinatene til dette punktet inn i likningen for planet.

$$\begin{aligned} 3 \cdot (1 + t) - 2 \cdot 2t - (6 - t) + 3 &= 0 \\ 3 + 3t - 4t - 6 + t + 3 &= 0 \\ 0t &= 0 \end{aligned}$$

Alle reelle tall t er løsninger på likningen. m ligger derfor *i* planet.

I de to siste eksemplene viste likningen vi fikk for t, at linjene l og m begge var parallelle med planet.

Det kan vi også vise med skalarprodukt.
$\vec{v} = [1\ , 2\ , -1]$ er en retningsvektor for både l og m, og planet $3x - 2y - z + 3 = 0$ har normalvektoren $\vec{n} = [3\ , -2\ , -1]$.
Siden skalarproduktet $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ (vis dette), må linjene stå vinkelrett på normalvektoren til planet. Da må de være parallelle med planet.

At den ene linja ligger *i* planet og den andre *utenfor* planet, framgår ikke av utregningen med skalarprodukt. Det må vi undersøke spesielt ved å sette koordinatene til et punkt på linja inn i likningen for planet.

Oppgave 1.32
Finn eventuelle skjæringspunkter mellom linja og planet gitt ved

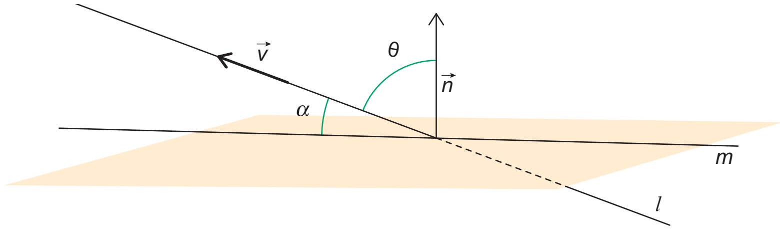
a $x = 2t \ \wedge \ y = 1 - t \ \wedge \ z = 2 - t$ og $x + 2y - z - 1 = 0$
b $x = t \ \wedge \ y = 2 + 2t \ \wedge \ z = -t$ og $3x + 2y + 7 = 0$
c $x = -2t \ \wedge \ y = 1 + t \ \wedge \ z = 3 + 2t$ og $2x + 6y - z - 1 = 0$

Oppgave 1.33
Bruk skalarprodukt til å undersøke om linja er parallell med planet. I så fall, avgjør om linja ligger i planet eller utenfor planet.

a $x = 2 - t \ \wedge \ y = 1 - t \ \wedge \ z = 2 + 3t$ og $x + 2y - z + 1 = 0$
b $x = 4 \ \wedge \ y = 3 + 2t \ \wedge \ z = 4 - t$ og $-3x + 2y + 4z - 10 = 0$

Vinkel mellom plan og linje

Vinkelen α mellom en linje l og et plan er definert som den minste vinkelen mellom l og en linje som ligger i planet (m på figuren).



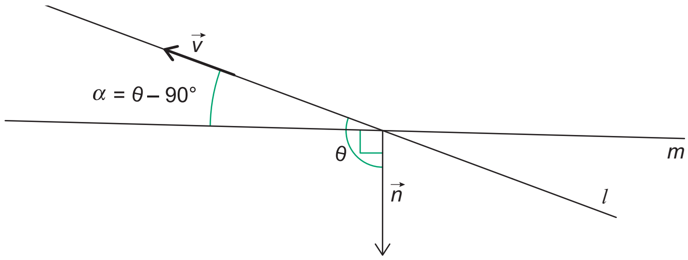
Et plan har normalvektor $\vec{n}$, og en linje l har retningsvektor $\vec{v}$. Linja m ligger i planet, og $\vec{n}$ står derfor vinkelrett på m.

Vinkelen θ mellom $\vec{n}$ og $\vec{v}$ finner vi av $\cos\theta = \dfrac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}|}$.

Videre må vi skille mellom to tilfeller: $\theta \le 90°$ og $\theta > 90°$.

For $\theta \le 90°$ er $\alpha = 90° - \theta$ vinkelen mellom l og planet.

For $\theta > 90°$ er $\alpha = \theta - 90°$ vinkelen mellom l og planet.



Eksempel 4 Vinkel mellom plan og linje

Vi skal finne vinkelen mellom planet $x - 2y + z = 0$ og linja $x = 2t \ \wedge \ y = 1 + 2t \ \wedge \ z = 2 + t$.

$\vec{n} = [1, -2, 1]$ er en normalvektor for planet, og $\vec{v} = [2, 2, 1]$ er en retningsvektor for linja. Vinkelen θ mellom $\vec{n}$ og $\vec{v}$ er gitt ved

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{[1, -2, 1]\cdot[2, 2, 1]}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}\cdot\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{6}\cdot 3}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{3\sqrt{6}}\right) = 97{,}8°$$

NB! θ er ikke vinkelen mellom planet og linja. Den er enten $\alpha = 90° - \theta$ eller $\alpha = \theta - 90°$. Da θ er en stump vinkel, bruker vi den siste sammenhengen.
Vinkelen mellom planet og linja er $\alpha = \theta - 90° = 97{,}8° - 90° = 7{,}8°$.

Oppgave 1.34

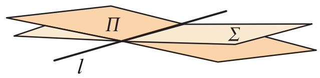
Bestem vinkelen mellom planet Π og linja l.

a Π har normalvektoren $\vec{n} = [0, 3, 4]$, og l har retningsvektoren $\vec{v} = [6, 3, -2]$.

b Π: $2x + 3y + z - 4 = 0$ og
l: $x = 2 + t \wedge y = 3t - 1 \wedge z = 1 - 2t$

c Π: $x - 5z + 14 = 0$ og
l: $x = 2 + 4t \wedge y = 7t - 21 \wedge z = 1 - 12t$

Skjæring mellom plan



Hvis to plan ikke er parallelle, skjærer de hverandre langs en rett linje.

For å bestemme en vektorlikning eller en parameterframstilling for skjæringslinja l mellom to plan Π og Σ, trenger vi to punkter på linja l, eller ett punkt og en retningsvektor.

Eksempel 5 Skjæring mellom to plan

Vi skal finne skjæringslinja l mellom Π: $2x + y - z + 1 = 0$ og Σ: $3x - 2y + z + 2 = 0$.
Normalvektorene er $\vec{n}_\Pi = [2, 1, -1]$ og $\vec{n}_\Sigma = [3, -2, 1]$.
Skjæringslinja ligger i begge plan og er derfor vinkelrett på begge normalvektorene.
$\vec{n}_\Pi \times \vec{n}_\Sigma$ er derfor en retningsvektor for l.

$$[2, 1, -1] \times [3, -2, 1] = [-1, -5, -7]$$

Vi velger å bruke $\vec{v} = [1, 5, 7]$ som retningsvektor.
I tillegg til retningsvektoren må vi ha et punkt på linja. Vi setter for eksempel $x = 0$ og finner hvilken y- og z-koordinat som da oppfyller de to planlikningene.

$$y - z + 1 = 0$$

$$-2y + z + 2 = 0$$

Adderer vi venstresidene, faller z-leddene bort, og vi får $-y + 3 = 0$.
Det gir $y = 3$, og da blir $z = y + 1 = 3 + 1 = 4$.
Punktet $(0, 3, 4)$ passer i begge planlikningene og ligger derfor på skjæringslinja l.
$[x, y, z] = [0, 3, 4] + t \cdot [1, 5, 7]$ er en vektorlikning for l.
Denne likningen er ekvivalent med parameterframstillingen

$$x = t \wedge y = 3 + 5t \wedge z = 4 + 7t$$

Oppgave 1.35

Bestem en parameterframstilling for skjæringslinja mellom planene

a $x + y + z = 0$ og $3x - y + 2z - 6 = 0$

b $4x + y - z + 5 = 0$ og $x - y + 2z + 3 = 0$

c $2x + y + 2z - 5 = 0$ og yz-planet

Likningsframstilling for en linje

Vi har sett at vi kan gi et plan på to måter:

- ved en parameterframstilling
- ved en likning $(ax + by + cz + d = 0)$

Linjer har vi så langt bare gitt ved en parameterframstilling (vektorlikning). Også linjer kan vi gi på likningsform. Da benytter vi at to ikke-parallelle plan bestemmer en linje. For to plan Π og Σ,

$$\Pi: \quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$\Sigma: \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

består skjæringslinja mellom planene av alle punkter som passer i begge likningene. Til sammen utgjør derfor disse to planlikningene likningsframstillingen for en linje.

NB! De to likningene kan vi ikke skrive om til én likning mellom x, y og z. Da får vi likningen for et plan.
Derimot kan vi skrive dem på en form som det er lettere å tolke.

Framgangsmåten er å uttrykke én av de variable ved hver av de to andre. Vi kan for eksempel finne x uttrykt ved y, og deretter x uttrykt ved z.
Vi ser hvordan vi gjør dette i eksempel 6.

Eksempel 6 Likninger for en linje

Vi skal finne skjæringslinja l mellom planene $\Pi\colon\ 2x + y - z + 1 = 0$ og $\Sigma\colon\ 3x - 2y + z + 2 = 0$. (Dette er de samme planene som i eksempel 5.)
Ved å addere likningene eliminerer vi z. Da står vi igjen med $5x - y + 3 = 0$.

Denne likningen kan vi skrive $x = \dfrac{y-3}{5}$.

Så ønsker vi å sette opp en tilsvarende sammenheng mellom x og z.
Vi multipliserer likningen for Π med 2 og adderer likningene.

$$\begin{array}{ll} 4x + 2y - 2z + 2 = 0 & \text{I} \\ 3x - 2y + z + 2 = 0 & \text{II} \\ 7x - z + 4 = 0 & \text{I + II} \end{array}$$

Løst med hensyn på x får vi $x = \dfrac{z-4}{7}$.

De to likningene kan vi skrive på følgende måte: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z-4}{7}$ ①

Dette er en skrivemåte (som egentlig er to likninger) for skjæringslinja mellom planene Π og Σ.
Verdiene $x = 0$, $y = 3$ og $z = 4$ passer i likningen ①.
$(0, 3, 4)$ er derfor et punkt på linja.
Tallene 1, 5 og 7 i nevnerne er x- y- og z-komponenten til retningsvektoren for linja.

I eksempel 5 fant vi parameterframstillingen

$$x = t$$
$$y = 3 + 5t$$
$$z = 4 + 7t$$

for linja l.

Vi vil vise hvordan vi finner en likningsframstilling for linja når vi har en parameterframstilling.

Av de tre parameteruttrykkene finner vi tre uttrykk for t:

$$t = x$$
$$t = \frac{y-3}{5}$$
$$t = \frac{z-4}{7}$$

Dette gir likningsframstillingen vi fant i eksempel 6:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-4}{7} \qquad (2)$$

Nå kan vi også se at tallene i nevnerne gir retningsvektoren for linja, $\vec{v} = [1, 5, 7]$.

For linjer som er parallelle med xy-, xz- eller yz-planet, kan vi ikke skrive likningen på den «symmetriske» formen i (2).

Vi ser på linja gitt ved parameterframstillingen

$$x = 2 \ \wedge \ y = 3 + 5t \ \wedge \ z = 4 + 7t$$

Her får vi $t = \dfrac{y-3}{5}$ og $t = \dfrac{z-4}{7}$.

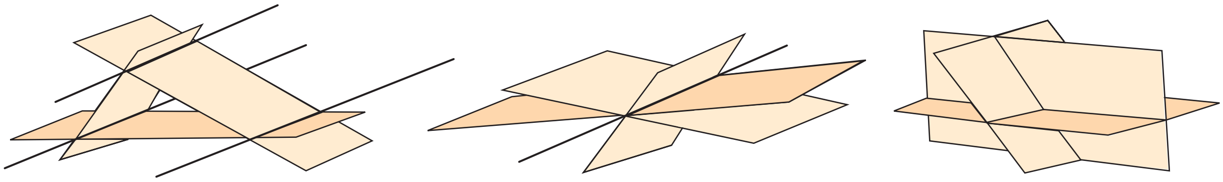
Da skriver vi likningsframstillingen for linja slik:

$$x = 2 \ \text{ og } \ \frac{y-3}{5} = \frac{z-4}{7}$$

Denne linja har retningsvektoren $\vec{v} = [0, 5, 7]$. Da x-koordinaten er konstant, er linja parallell med yz-planet.

Skjæring mellom tre plan

Tre ikke-parallelle plan vil gi en av de tre situasjonene på figuren.



De tre planene til venstre har ingen felles punkter. To og to av planene skjærer hverandre langs en rett linje, men det tredje planet er parallelt med, og *ikke* sammenfallende med denne linja.

På figuren i midten inneholder hvert plan skjæringslinja for de to andre planene. De tre planene har da uendelig mange fellespunkter, og disse fellespunktene ligger på samme rette linje.

Til høyre har de tre planene bare ett punkt felles.

Fra parameterframstilling til likning for plan

Vi skal se på hvordan vi kan gå fra parameterframstilling til likning for et plan.
For et plan gitt ved parameterframstilling kjenner vi både et punkt i planet og to vektorer som er parallelt med planet.
Et plan gitt ved parameterframstillingen

$$x = x_0 + a_1 s + a_2 t \ \wedge \ y = y_0 + b_1 s + b_2 t \ \wedge \ z = z_0 + c_1 s + c_2 t$$

går gjennom (x_0 , y_0 , z_0) og er parallelt med $\vec{u} = [a_1 , b_1 , c_1]$ og $\vec{v} = [a_2 , b_2 , c_2]$.

Av de to vektorene bestemmer vi en normalvektor til planet, $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$. Da har vi det vi trenger for å sette opp en likning for planet.

Oppgave 1.36
Bestem likningen for planet gitt ved parameterframstillingen
$x = 2 + s - t \ \wedge \ y = 3s + t \ \wedge \ z = 1 - s - 2t$.

Fra likning til parameterframstilling for plan

Når vi kjenner likningen for et plan, $ax + by + cz + d = 0$, vet vi at $\vec{n} = [a , b , c]$ er en normalvektor til planet.
For parameterframstillingen trenger vi to vektorer som er parallelle med planet, altså vinkelrett på $\vec{n}$.
Skalarproduktet $[b , -a , 0] \cdot [a , b , c] = b \cdot a - a \cdot b + 0 \cdot c = 0$ viser at $\vec{u} = [b , -a , 0]$ er vinkelrett på $\vec{n} = [a , b , c]$.
Vis at også $\vec{v} = [c , 0 , -a]$ er vinkelrett på $\vec{n}$.

Av likningen for planet finner vi et punkt i planet. Dermed kan vi sette opp en parameterframstilling.

Eksempel 7 Fra likning til parameterframstilling

Vi skal lage en parameterframstilling for planet $2x-3y+z+1=0$.
Da trenger vi et punkt i planet og to retningsvektorer.
Vi ser at $(0,0,-1)$ passer i planlikningen.
Planet har normalvektoren $\vec{n}=[2,-3,1]$.
Vi trenger to vektorer som står vinkelrett på $\vec{n}$.
Vektorene $[3,2,0]$ og $[0,1,3]$ står vinkelrett på $\vec{n}=[2,-3,1]$.
Vektorlikningen for planet blir

$$[x,y,z]=[0,0,-1]+s[3,2,0]+t[0,1,3]$$

$$x=3s$$

$$y=2s+t$$

$$z=-1+3t$$

er en parameterframstilling for planet gitt ved likningen $2x-3y+z+1=0$.

Sti 1	Sti 2	Sti 3

Stifinner: side 321

Oppgave 1.37

a Bestem en parameterframstilling for planet gitt ved $x-2y-z-4=0$.

b Bestem en parameterframstilling for planet gitt ved $2x-3z-6=0$.

1.6 AVSTAND MELLOM PUNKTER, LINJER OG PLAN

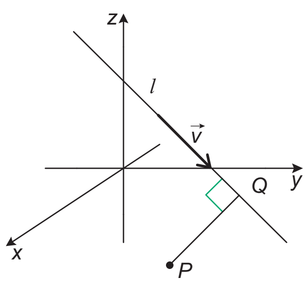
I 1.6 skal du lære å regne ut avstander fra et punkt til en linje, og til et plan.

I underkapittel 1.1 fant vi avstander mellom to punkter. I dette underkapitlet skal vi finne avstanden mellom

- et punkt og en linje
- et punkt og et plan
- to linjer
- to plan

Avstander til linjer og plan måler vi langs normaler.
Da blir både skalarprodukt og vektorprodukt nyttige verktøy.

Avstand mellom punkt og linje og mellom to linjer



For å finne avstanden fra et punkt P til en linje l kan vi bruke samme metode i rommet som vi brukte i planet.

Linja l har retningsvektor $\vec{v}$. Vi lar Q være det punktet på l som ligger nærmest P.
Da må $\overrightarrow{PQ}$ stå vinkelrett på $\vec{v}$.

$$\overrightarrow{PQ}\perp\vec{v} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}=0$$

Når vi kjenner en parameterframstilling for linja, kan vi uttrykke punktet Q ved bare én ukjent, parameteren t.
Av likningen $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$ finner vi så t.

Eksempel 1 Avstand fra punkt til linje med skalarprodukt

En linje har parameterframstillingen $x = 1 + 2t \ \wedge \ y = t \ \wedge \ z = 1 - t$.
Vi skal finne avstanden fra punktet $P = (3, 4, -2)$ til linja.
Linja har retningsvektoren $\vec{v} = [2, 1, -1]$.
En vektor fra P til et punkt Q på linja kan vi skrive
$\overrightarrow{PQ} = [1 + 2t - 3, t - 4, 1 - t - (-2)] = [2t - 2, t - 4, 3 - t]$
Vi bestemmer t slik at $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} &= 0 \\
[2t - 2, t - 4, 3 - t] \cdot [2, 1, -1] &= 0 \\
(2t - 2) \cdot 2 + (t - 4) \cdot 1 + (3 - t) \cdot (-1) &= 0 \\
4t - 4 + t - 4 - 3 + t &= 0 \\
6t &= 11 \\
t &= \frac{11}{6}
\end{aligned}$$

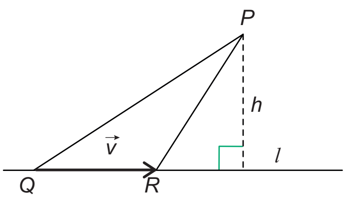
Denne t-verdien setter vi inn i uttrykket for $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = \left[2 \cdot \frac{11}{6} - 2 \ , \ \frac{11}{6} - 4 \ , \ 3 - \frac{11}{6}\right] = \left[\frac{10}{6} \ , \ \frac{-13}{6} \ , \ \frac{7}{6}\right]$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{\left(\frac{10}{6}\right)^2 + \left(\frac{-13}{6}\right)^2 + \left(\frac{7}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{318}{36}} = 2{,}97$$

Avstanden fra P til linja er 2,97.

Oppgave 1.38
Bruk metoden i eksempel 1 til å finne avstanden mellom
a origo og linja $x = 2 + 2t \ \wedge \ y = 1 + t \ \wedge \ z = 2 + t$
b $(2, 1, 0)$ og linja $x = 4 + 3t \ \wedge \ y = -t \ \wedge \ z = 1 + 2t$



Ved bruk av vektorprodukt kan vi lage en formel for avstanden fra et punkt P til en rett linje l. Vi lar Q være et vilkårlig punkt på linja, og $\vec{v}$ en retningsvektor for linja.

Videre lar vi R være et punkt på linja l slik at $\overrightarrow{QR} = \vec{v}$.

Fra underkapittel 1.3 vet vi at ΔPQR har arealet $G = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}\right|$.

I tillegg vet vi at ΔPQR har arealet $G = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{QR}\right| \cdot h$, der h er høyden i ΔPQR når $\left|\overrightarrow{QR}\right|$ er grunnlinje.

Høyden h er dessuten avstanden fra P til linja l. Det gir

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{QR}\right| \cdot h = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}\right|$$

$$h = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}\right|}{\left|\overrightarrow{QR}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}\right|}{|\vec{v}|}$$

Det gir følgende formel for avstanden fra et punkt til en linje:

> Avstanden fra et punkt P til en rett linje som går gjennom Q og har retningsvektor $\vec{v}$, er
>
> $$\frac{\left|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}\right|}{|\vec{v}|}$$

Eksempel 2 Avstand fra punkt til linje med formel

Vi skal regne ut avstanden fra $P = (4, 3, 1)$ til linja l gitt ved $x = 2 + 2t \;\wedge\; y = t \;\wedge\; z = 3 - 2t$.
$Q = (2, 0, 3)$ er et punkt på l og $\vec{v} = [2, 1, -2]$ er en retningsvektor for l.

Da er $\overrightarrow{QP} = [4-2, 3-0, 1-3] = [2, 3, -2]$.

$$\overrightarrow{QP} \times \vec{v} = [2, 3, -2] \times [2, 1, -2] = [-4, 0, -4]$$

$$D = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}\right|}{|\vec{v}|} = \frac{|[-4, 0, -4]|}{|[2, 1, -2]|} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-4)^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{32}}{3} = 1{,}89$$

Avstanden fra P til l er 1,89.

Oppgave 1.39

Bestem avstanden mellom

a $(-1, 4, 2)$ og linja $x = 3 - t \;\wedge\; y = 4t \;\wedge\; z = 1 + 2t$

b $(1, -3, 5)$ og linja $x = 2t \;\wedge\; y = 2 - 3t \;\wedge\; z = 4 + 2t$

Vi kan bruke samme metode for å finne avstanden mellom to parallelle linjer. Da velger vi et punkt på den ene linja, og så finner vi avstanden fra dette punktet til den andre linja.

Eksempel 3 Avstand mellom parallelle linjer

Vi har gitt linjene l: $x = t \wedge y = 3 - 2t \wedge z = 6 + 4t$ og m: $x = 5 - t \wedge y = -1 + 2t \wedge z = 3 - 4t$.

l og m har retningsvektorene $\vec{v}_l = [1, -2, 4]$ og $\vec{v}_m = [-1, 2, -4]$.

Her kan vi se at $\vec{v}_m = -\vec{v}_l$. Linjene er altså parallelle.

$P = (0, 3, 6)$ er et punkt på l, og $Q = (5, -1, 3)$ er et punkt på m.

$$\overrightarrow{QP} = [0-5, 3-(-1), 6-3] = [-5, 4, 3]$$

$$\overrightarrow{QP} \times \vec{v}_l = [-5, 4, 3] \times [1, -2, 4] = [22, 23, 6]$$

$$D = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}_l\right|}{|\vec{v}_l|} = \frac{|[22, 23, 6]|}{|[1, -2, 4]|} = \frac{\sqrt{22^2 + 23^2 + 6^2}}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{1049}}{\sqrt{21}} = 7{,}07$$

Avstanden mellom linjene l og m er 7,07.

Oppgave 1.40

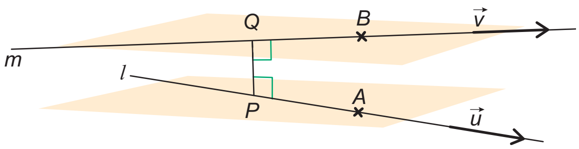
Bestem avstanden mellom

a linjene $x = 1 - 2t \ \wedge\ y = 5 + t \ \wedge\ z = 2t$ og
$x = -2t \ \wedge\ y = t \ \wedge\ z = 3 + 2t$

b linjene $x = 4 + 2t \ \wedge\ y = -3 + 3t \ \wedge\ z = 5 - t$ og
$x = 7 - 2t \ \wedge\ y = -3t \ \wedge\ z = 2 + t$

Vindskeive linjer

Avstanden mellom to vindskeive linjer måler vi langs en linje som står vinkelrett på begge linjene.



Vi ser på to linjer l og m med retningsvektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
l går gjennom punktet A, og m går gjennom punktet B.

$$l\text{: } \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \vec{u} \quad \text{og} \quad m\text{: } \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + t \cdot \vec{v}$$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + t \cdot \vec{v} - (\overrightarrow{OA} + s \cdot \vec{u}) = \overrightarrow{AB} + t \cdot \vec{v} - s \cdot \vec{u}$ er da en vektor som går fra et punkt på l til et punkt på m.
Så må vi bestemme parametrene s og t slik at $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{u}$ og $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}$.
Da er $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ avstanden mellom l og m.

Eksempel 4 Avstand mellom vindskeive linjer

Vi vil bestemme avstanden mellom linjene gitt ved
l: $x = 1 + 2s \wedge y = s \wedge z = 1 - s$ og m: $x = 4 - t \wedge y = 1 + 4t \wedge z = 2t$

Linjene har retningsvektorene $\vec{u} = [2, 1, -1]$ og $\vec{v} = [-1, 4, 2]$.
$P = (1 + 2s, s, 1 - s)$ er et vilkårlig punkt på l, og $Q = (4 - t, 1 + 4t, 2t)$ er et vilkårlig punkt på m. Vi finner $\overrightarrow{PQ}$ uttrykt ved s og t.

$$\overrightarrow{PQ} = [4 - t - (1 + 2s), 1 + 4t - s, 2t - (1 - s)] = [3 - t - 2s, 1 + 4t - s, 2t - 1 + s]$$

Vi må nå finne verdier for s og t slik at $\overrightarrow{PQ}$ står vinkelrett på både l og m.
Da må $\overrightarrow{PQ}$ stå vinkelrett på retningsvektorene til l og m.
$\overrightarrow{PQ} \perp \vec{u}$ og $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}$ gir

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{og} \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$$

$$[3 - t - 2s, 1 + 4t - s, 2t - 1 + s] \cdot [2, 1, -1] = 0 \qquad \text{og}$$

$$[3 - t - 2s, 1 + 4t - s, 2t - 1 + s] \cdot [-1, 4, 2] = 0$$

$$6 - 2t - 4s + 1 + 4t - s - 2t + 1 - s = 0 \quad \text{og} \quad -3 + t + 2s + 4 + 16t - 4s + 4t - 2 + 2s = 0$$

$$8 - 6s = 0 \quad \text{og} \quad -1 + 21t = 0$$

$$s = \frac{4}{3} \quad \text{og} \quad t = \frac{1}{21}$$

Vi setter verdiene for s og t inn i uttrykket for $\overrightarrow{PQ}$. Det gir

$$\overrightarrow{PQ} = [3 - \tfrac{1}{21} - 2 \cdot \tfrac{4}{3}, 1 + 4 \cdot \tfrac{1}{21} - \tfrac{4}{3}, 2 \cdot \tfrac{1}{21} - 1 + \tfrac{4}{3}] = [\tfrac{2}{7}, \tfrac{-1}{7}, \tfrac{3}{7}]$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{-1}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{14}{49}} = \frac{\sqrt{14}}{7} = 0,535$$

Avstanden mellom l og m er 0,535.

Oppgave 1.41
Bestem avstanden mellom linjene l og m gitt ved
l: $x = s \wedge y = 2s + 1 \wedge z = 3 - 2s$ og
m: $x = 3 - t \wedge y = 3t \wedge z = 3 - 2t$

Eksempel 5 Når parameteren står for tid

I dette eksemplet bruker vi et romkoordinatsystem der origo ligger på havoverflaten, x-aksen peker mot vest, y-aksen mot nord og z-aksen loddrett nedover. Alle lengder blir målt i meter, og tiden t blir målt i sekunder etter et bestemt klokkeslett.
Posisjonen til to ubåter er gitt ved posisjonsvektorene

$$\overrightarrow{OA} = [10, -10, 0] + t \cdot [-1, -1, 2] \quad \text{og} \quad \overrightarrow{OB} = [2, 10, 55] + t \cdot [4, 2, -2]$$

Vi skal finne den minste avstanden mellom de to ubåtene.
Vi danner en vektor fra posisjonen til den ene ubåten ved tidspunktet t til den andre ubåten ved samme tidspunkt.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [2, 10, 55] + t \cdot [4, 2, -2] - ([10, -10, 0] + t \cdot [-1, -1, 2])$$
$$= [-8, 20, 55] + t \cdot [5, 3, -4] = [-8 + 5t, 20 + 3t, 55 - 4t]$$

Så finner vi et uttrykk for avstanden:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-8+5t)^2 + (20+3t)^2 + (55-4t)^2} = \sqrt{50t^2 - 400t + 3489}$$

Den t-verdien som gir minst avstand, kan vi finne ved derivasjon.
En kvadratrot har sin minste verdi når *radikanden* (uttrykket som står under rottegnet) har sin minste verdi. I stedet for å derivere uttrykket for $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ forenkler vi regningen noe ved å derivere radikanden.
$f(t) = 50t^2 - 400t + 3489$. Når $f(t)$ har sin minste verdi, har også $\sqrt{f(t)}$ sin minste verdi.

$$f'(t) = 100t - 400$$

$f'(t) = 0$ for $t = 4$. I tillegg er $f'(t)$ positiv for t-verdier større enn 4 og negativ for t-verdier mindre enn 4. Dette viser at $t = 4$ gir den minste verdien av $f(t)$. Da har også $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ sin minste verdi.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|_{\min} = \sqrt{(-8+5\cdot 4)^2 + (20+3\cdot 4)^2 + (55-4\cdot 4)^2} = \sqrt{12^2 + 32^2 + 39^2} = \sqrt{2689} = 51{,}9$$

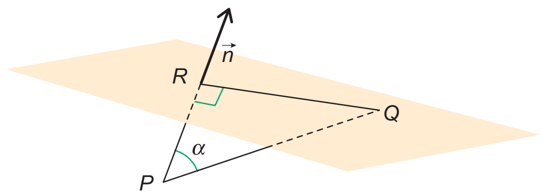
Den minste avstanden mellom ubåtene er altså ca. 50 m.

I eksempel 4 brukte vi to parametre, s og t. I det eksemplet fant vi den minst mulige avstanden mellom et punkt på linja l og et punkt på linja m.
I eksempel 5 er det bare én parameter. I dette eksemplet fant vi den minste avstanden mellom et punkt (ubåt-posisjon) på den ene linja og punktet med *samme* parameterverdi på den andre linja.

Oppgave 1.42
I et koordinatsystem der origo ligger på havoverflaten, x-aksen peker mot vest, y-aksen mot nord og z-aksen loddrett nedover, er posisjonen til to ubåter gitt ved
$\overrightarrow{OA} = [40, 20, 0] + t \cdot [8, -5, 3]$ og $\overrightarrow{OB} = [0, -40, 90] + t \cdot [10, 8, -4]$
Alle lengder blir målt i meter, og tiden blir målt i sekunder etter et bestemt klokkeslett.
a Bestem farten i m/s for de to ubåtene.
b Finn den minste avstanden mellom ubåtene.

Avstand til plan

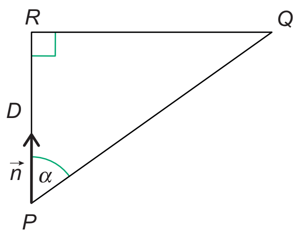
For et plan Π kjenner vi et punkt Q i planet og en normalvektor $\vec{n}$. Avstanden fra et punkt P til planet måler vi langs en normal på planet. Vi lar R være punktet i planet som ligger på normalen gjennom P. Da er PR avstanden fra P til planet. Punktene P, Q og R danner en rettvinklet trekant (forutsetning: $Q \neq R$).



Vi lar α være vinkelen mellom $\overrightarrow{PQ}$ og $\vec{n}$. Da er

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos\alpha \qquad (1)$$

I den videre utledningen skiller vi mellom to tilfeller: $\alpha < 90°$ og $\alpha > 90°$.



Vi ser først på $\alpha < 90°$.
Fra trekanttrigonometrien får vi at

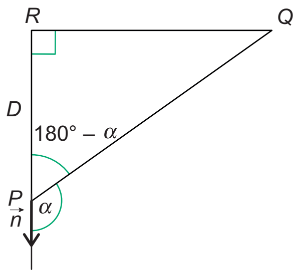
$$D = \left|\overrightarrow{PR}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \cdot \cos\alpha$$

Vi erstatter $\left|\overrightarrow{PQ}\right| \cdot \cos\alpha$ med D i (1). Det gir

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = |\vec{n}| \cdot D$$

$$D = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \qquad (2)$$

Så tar vi for oss $\alpha > 90°$.



$$D = \left|\overrightarrow{PR}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \cdot \cos(180° - \alpha) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \cdot (-\cos\alpha) = -\left|\overrightarrow{PQ}\right| \cdot \cos\alpha$$

Vi erstatter $\left|\overrightarrow{PQ}\right| \cdot \cos\alpha$ med $-D$ i (1). Det gir

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = -|\vec{n}| \cdot D$$

$$D = -\frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \qquad (3)$$

Uttrykkene (2) og (3) kan vi skrive

$$D = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$$

Dette uttrykket gjelder for både $\alpha < 90°$ og $\alpha > 90°$.
Uttrykket gjelder også for $\alpha = 90°$. Hva blir uttrykket da?

Eksempel 6 Avstand fra et punkt til et plan

Vi skal regne ut avstanden fra punktet $P = (-1, -3, 0)$ til planet $3x - y + 2z = 4$.
$\vec{n} = [3, -1, 2]$ er en normalvektor for planet, og $|\vec{n}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$.
I tillegg trenger vi et punkt Q i planet. Vi velger en verdi for to av koordinatene og finner hva den tredje må være for å passe i likningen for planet, for eksempel kan vi velge $x = 0$ og $y = 0$ og få $Q = (0, 0, 2)$.
Det gir $\overrightarrow{PQ} = [0-(-1), 0-(-3), 2-0] = [1, 3, 2]$.

$$D = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|[1, 3, 2] \cdot [3, -1, 2]|}{\sqrt{14}} = \frac{|1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2|}{\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}} = 1{,}07$$

Avstanden fra P til planet er altså 1,07.

Avstanden fra en linje til et plan er definert som den minste avstanden mellom et punkt på linja og et punkt i planet.
Avstanden mellom en linje og et plan er null hvis de ikke er parallelle.

NB! ► Avstanden mellom to plan er definert som den minste avstanden mellom et punkt i det ene planet til et punkt i det andre planet.
Avstanden mellom to plan er null hvis de ikke er parallelle.

Eksempel 7 Avstand fra en linje til et plan

Vi skal finne avstanden fra linja $x = 10 + 4t \ \wedge \ y = 2t \ \wedge \ z = 1 + t$ til planet $x - 4y + 4z = 12$.
$\vec{v} = [4, 2, 1]$ er en retningsvektor for linja, og $\vec{n} = [1, -4, 4]$ er en normalvektor for planet.
$\vec{v} \cdot \vec{n} = [4, 2, 1] \cdot [1, -4, 4] = 4 - 8 + 4 = 0$. Det viser at linja står vinkelrett på normalvektoren for planet. Da må linja og planet være parallelle.
$P = (10, 0, 1)$ er et punkt på linja.
Så finner vi et punkt Q i planet, f.eks. $Q = (0, 0, 3)$.
Da blir $\overrightarrow{PQ} = [0-10, 0-0, 3-1] = [-10, 0, 2]$.

$$D = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|[-10, 0, 2] \cdot [1, -4, 4]|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 4^2}} = \frac{|-10 \cdot 1 + 0 \cdot (-4) + 2 \cdot 4|}{\sqrt{33}} = \frac{|-2|}{\sqrt{33}}$$

Avstanden mellom linja og planet er $\frac{2}{\sqrt{33}} = 0{,}35$.

Oppgave 1.43
Bestem avstanden mellom planet $2x + 2y + z = 5$ og

a origo
b punktet $(1, 0, -2)$
c linja $x = 3 + t \ \wedge \ y = -3t \ \wedge \ z = 1 + 4t$
d planet $2x + 2y + z = 14$

Formel for avstand til et plan

Vi skal finne et uttrykk for avstanden fra punktet $P=(x_1\,,y_1\,,z_1)$ til planet $ax+by+cz+d=0$.
$\vec{n}=[a\,,b\,,c]$ er en normalvektor for planet, og den har lengden $|\vec{n}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
Vi lar $Q=(x_0\,,y_0\,,z_0)$ være et punkt i planet. Da vet vi at

$$ax_0+by_0+cz_0+d=0 \qquad (4)$$

Avstanden D er gitt ved

$$\begin{aligned}
D &= \frac{\left|\overrightarrow{QP}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}\\
&= \frac{\left|[x_1-x_0\,,y_1-y_0\,,z_1-z_0]\cdot[a\,,b\,,c]\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\
&= \frac{\left|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\
&= \frac{\left|ax_1-ax_0+by_1-by_0+cz_1-cz_0\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\
&= \frac{\left|ax_1+by_1+cz_1-(ax_0+by_0+cz_0)\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}
\end{aligned}$$

Vi sammenlikner parentesen i telleren med (4). Da får vi at

$$-(ax_0+by_0+cz_0)=d$$

Det gir formelen

$$D=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Formelen for D inneholder ikke koordinatene til $Q=(x_0\,,y_0\,,z_0)$.
Det kommer av at formelen viser avstanden fra P til *planet*, ikke avstanden fra P til Q.

Setter vi inn koordinatene til et punkt P som ligger *i* planet, blir teller null. Og det stemmer jo!

Hvordan blir avstandsformelen hvis punktet P er origo?

Avstand mellom et punkt og et plan
Avstanden fra punktet $P=(x_1\,,y_1\,,z_1)$ til planet $ax+by+cz+d=0$ er

$$D=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad (5)$$

Eksempel 8 Avstand mellom punkt og plan med avstandsformelen

Et plan er gitt ved $12x-4y+3z-23=0$. Vi skal regne ut avstanden fra $P=(5\,,1\,,2)$ til planet.

Avstandsformelen ⑤ gir

$$D=\frac{|12\cdot 5-4\cdot 1+3\cdot 2-23|}{\sqrt{12^2+(-4)^2+3^2}}=\frac{|60-4+6-23|}{\sqrt{144+16+9}}=\frac{39}{13}=3$$

Avstanden fra P til planet er 3.

For avstanden fra origo til planet $ax+by+cz+d=0$ forenkler avstandsformelen seg til

$$D=\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Hvorfor?

Eksempel 9 Avstand mellom to plan

To plan Π og Σ er gitt ved $2x+4y+3z-19=0$ og $2x+4y+3z+10=0$. Begge planene har $[2\,,4\,,3]$ som normalvektor. Det viser at planene er parallelle. Vi skal finne avstanden mellom dem.

Vi finner et punkt i det ene planet og regner ut avstanden fra dette punktet til det andre planet.
$(-5\,,0\,,0)$ er et punkt i planet Σ. Avstanden til planet Π er

$$D=\frac{|2\cdot(-5)+4\cdot 0+3\cdot 0-19|}{\sqrt{2^2+4^2+3^2}}=\frac{|-29|}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}\approx 5,4$$

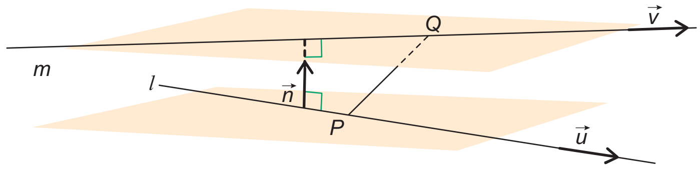
Oppgave 1.44

Bruk formel ⑤ på forrige side til å regne ut avstanden mellom

- a origo og planet $x-2y-2z-6=0$
- b $(4\,,1\,,-3)$ og planet $x+4y-5z-12=0$
- c $(0\,,-3\,,2)$ og planet $2x-y+6z=0$
- d planene $6x+4y-z-20=0$ og $6x+4y-z-5=0$

Vindskeive linjer og avstandsformel

Retningsvektorene til to vindskeive linjer l og m bestemmer en entydig orientering til et plan som er parallelt med begge linjene. Vi lar to slike plan Π og Σ inneholde l og m. Da er avstanden mellom l og m det samme som avstanden mellom Π og Σ.



P og *Q* er punkter på hver sin linje. Fra side 57 vet vi at avstanden mellom de to planene er $\dfrac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$.

Som normalvektor $\vec{n}$ bruker vi $\vec{u}\times\vec{v}$, der $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er retningsvektorer for de to linjene. Det gir følgende formel for avstanden mellom vindskeive linjer:

Avstand mellom vindskeive linjer
To vindskeive linjer har hver sin retningsvektor $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
P er et punkt på den ene linja, og *Q* er et punkt på den andre linja. Da er avstanden mellom linjene gitt ved

$$D = \frac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$$

Eksempel 10 Avstand mellom vindskeive linjer

Vi har gitt to linjer l og m.

l: $x=-2 \wedge y=3+4s \wedge z=1-3s$ og m: $x=2-t \wedge y=1+2t \wedge z=t$

l går gjennom $P=(-2,3,1)$ og har retningsvektoren $\vec{u}=[0,4,-3]$.

m går gjennom $Q=(2,1,0)$ og har retningsvektoren $\vec{v}=[-1,2,1]$.

$$\overrightarrow{PQ}=[2-(-2),1-3,0-1]=[4,-2,-1] \quad \text{og} \quad \vec{u}\times\vec{v}=[0,4,-3]\times[-1,2,1]=[10,3,4]$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{10^2+3^2+4^2}=\sqrt{125}$$

$$D=\frac{|\overrightarrow{QP}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{|[4,-2,-1]\cdot[10,3,4]|}{\sqrt{125}}=\frac{|4\cdot 10+(-2)\cdot 3+(-1)\cdot 4|}{\sqrt{125}}=\frac{30}{\sqrt{125}}=2{,}68$$

Avstanden mellom l og m er 2,68.

Sti 1 | Sti 2 | Sti 3

Stifinner: side 322

Oppgave 1.45

Bestem avstanden mellom linjene l og m gitt ved

a l: $x=3s \wedge y=2s+4 \wedge z=1-2s$ og
m: $x=2+t \wedge y=-3t \wedge z=-t$

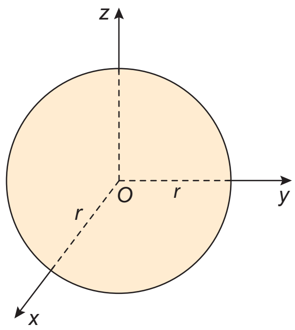
b l: $x=4+2s \wedge y=3-s \wedge z=2+2s$ og
m: $x=1-t \wedge y=-2-3t \wedge z=1+t$

1.7 ROMFIGURER

I 1.7 skal du lære å finne likningen for en kuleflate, og løse problemer knyttet til romfigurer begrenset av plan og kuleflater.

Kuleflater

En kuleflate inneholder alle punkter som har en gitt avstand fra kulas sentrum. Avstanden er kulas radius.
For en kule med sentrum i origo og radius r består overflaten av alle punkter med avstanden r fra origo. Ved å bruke avstandsformelen på side 12 kan vi sette opp en likning for kuleflaten.



Vi lar $P = (x, y, z)$ være et vilkårlig punkt på overflaten av en kule med radius r og sentrum i origo.
Da er $OP = r$, som kan skrives

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$$

Vi kvadrerer for å få en «penere» likning:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Dette er likningen for kuleflaten til en kule med sentrum i origo og radius r.

Hvis kula i stedet har sentrum i et punkt $Q = (x_0, y_0, z_0)$, får vi

$$QP = r$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Likning for en kuleflate
Kuleflaten til en kule med radius r og sentrum i (x_0, y_0, z_0) er gitt ved likningen $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ 1

De er estetiske og fascinerende. Du finner dem på gjerdestolper og i inngangspartier, som religiøse symboler og som symboler på makt …

Eksempel 1 Likningen for en kuleflate

En kule har sentrum i $(2\,,-4\,,-1)$ og radius 3. Vi skal finne likningen til kuleflaten og undersøke om $(0\,,-3\,,-3)$ ligger på denne flaten.
Likningen til kuleflaten er $(x-2)^2+\big(y-(-4)\big)^2+\big(z-(-1)\big)^2=3^2$.

$$(x-2)^2+(y+4)^2+(z+1)^2=9 \qquad (2)$$

Punktet $(0\,,-3\,,-3)$ ligger på kuleflaten, for koordinatene passer i likningen:

$$(0-2)^2+(-3+4)^2+(-3+1)^2=4+1+4=9$$

Oppgave 1.46

a Skriv likningen for en kuleflate med sentrum i origo og radius 8.

b Skriv likningen for en kuleflate med sentrum i $(-3\,,4\,,1)$ og radius 2.

Multipliserer vi ut parentesene i likningen for kuleflaten i eksempel 1, får vi

$$x^2-4x+4+y^2+8y+16+z^2+2z+1=9$$

$$x^2-4x+y^2+8y+z^2+2z+12=0$$

Nå er det ikke så lett å se hva sentrum og radien er. For å avgjøre om en gitt likning svarer til en kuleflate, må vi undersøke om vi kan skrive likningen på formen (1). (Se forrige side.) Vi må da lage *fullstendige kvadrater* av leddene med x, y og z.
De tre leddene $(x-2)^2$, $(y+4)^2$ og $(z+1)^2$ i (2) er fullstendige kvadrater.

x^2-4x+4 kan vi skrive som et fullstendig kvadrat, siden
$x^2-4x+4=(x-2)^2$.
x^2-4x er derimot ikke et fullstendig kvadrat.

1. og 2. kvadratsetning:
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

I det siste uttrykket får vi et fullstendig kvadrat ved å addere 4.

Ser du hva vi må addere til y^2+8y for å få et fullstendig kvadrat?

Når vi har et uttrykk x^2+kx, får vi et fullstendig kvadrat ved å addere $\left(\frac{k}{2}\right)^2$.
«Vi halverer, kvadrerer og adderer».

Vi ser på likningen

$$x^2-2x+y^2-6y+z^2+4z=11 \qquad (3)$$

Først tar vi for oss leddene som inneholder x.

$$x^2-2x$$

Vi halverer tallet foran x og får -1. Så kvadrerer vi -1 og får $(-1)^2 = 1$. Når vi adderer 1 til $x^2 - 2x$, får vi et fullstendig kvadrat.

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

NB! ► Når vi adderer 1 på venstre side i likning ③, må vi også addere 1 på høyre side.

For y-leddene får vi et fullstendig kvadrat ved å addere $\left(\frac{-6}{2}\right)^2 = 9$.

$$y^2 - 6y + 9 = (y-3)^2$$

Og for z-leddene adderer vi $2^2 = 4$.

$$z^2 + 4z + 4 = (z+2)^2$$

Samlet gir det

$$x^2 - 2x + y^2 - 6y + z^2 + 4z = 11$$

$$(x^2 - 2x + (-1)^2) + (y^2 - 6y + (-3)^2) + (z^2 + 4z + 2^2) = 11 + 1 + 9 + 4$$

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 25 = 5^2$$

Nå ser vi at dette er likningen for en kuleflate med radius 5 og sentrum i $(1, 3, -2)$.
Hvis koeffisientene foran andregradsleddene ikke er 1, deler vi først hele likningen med koeffisienten.
Hvis koeffisientene foran andregradsleddene i likningen ikke er like, har vi ikke en likning for en kuleflate.

Eksempel 2 Likning for en kuleflate?

Vi skal avgjøre om $x^2 + 14x + y^2 - 12y + z^2 + 85 = 0$ er likningen for en kuleflate, og eventuelt bestemme radius og sentrum. Vi bruker metoden med fullstendige kvadrater.

$$x^2 + 14x + y^2 - 12y + z^2 = -85$$

$$(x^2 + 14x + 7^2) + (y^2 - 12y + 6^2) + z^2 = -85 + 7^2 + 6^2$$

$$(x+7)^2 + (y-6)^2 + (z-0)^2 = -85 + 49 + 36 = 0$$

$$(x+7)^2 + (y-6)^2 + (z-0)^2 = 0$$

Fordi radien her er null, er det ikke likningen for en kuleflate.
$(-7, 6, 0)$ er det eneste punktet som passer i likningen.

Oppgave 1.47

Avgjør om likningen gir en kuleflate, og bestem eventuelt sentrum og radius.

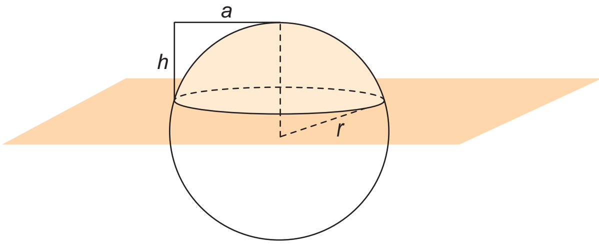
a $x^2 + 4x + y^2 - 2y + z^2 - 6z - 11 = 0$

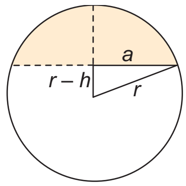
b $x^2 + 12x + y^2 + z^2 + 2z + 40 = 0$

c $2x^2 + 12x + 2y^2 - 4y + z^2 - 8z + 1 = 0$

Kulesegment

Et plan som skjærer en kuleflate, deler kula i to deler. De to delene kaller vi *kulesegmenter*.





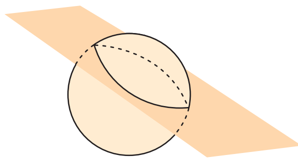
Du har tidligere lært at overflaten av en kule er $O = 4\pi r^2$.
Nå skal vi finne overflaten av et kulesegment. Denne overflaten er bestemt av radien r til kula og høyden h på kulesegmentet:

> Overflaten S av et kulesegment med høyde h i en kule med radius r er $S = 2\pi rh$.

Denne formelen kan vi bevise ved hjelp av integrasjonsmetoder, se nettstedet på Lokus.
Vis selv at formelen gir riktig overflate for $h = 0$, $h = r$ og $h = 2r$!

Eksempel 3 Overflate av kulesegment

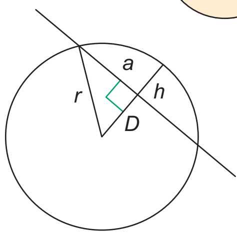
Planet $2x + 2y - z - 34 = 0$ skjærer kuleflaten $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 400$ i to deler.
Vi skal finne overflaten av den minste kuledelen.



Kula har radius 20 og sentrum i $(2, -1, 4)$.

Vi bestemmer først avstanden fra sentrum i kula til planet.
Vi bruker avstandsformelen på side 59:

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 4 - 34|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 12$$



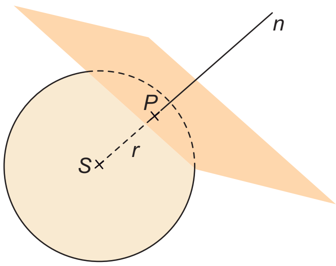
Høyden på kulesegmentet er da $h = r - D = 20 - 12 = 8$.
Overflaten er $2\pi rh = 2\pi \cdot 20 \cdot 8 = 320\pi = 1005{,}3$.

Hvis du skal regne ut overflaten til hele romfiguren i eksempel 3, ikke bare kulesegmentet, må du også ta med snittsirkelen. Arealet av snittsirkelen er

$$A = \pi a^2 = \pi(r^2 - D^2) = \pi \cdot (20^2 - 12^2) = 256\pi = 804{,}2$$

Eksempel 4 Kule og tangentplan

En kule med sentrum i $S = (2, 9, 2)$ blir tangert av planet $x - 2y + 2z - 15 = 0$. Det betyr at kuleflaten og planet har ett felles punkt, tangeringspunktet P. Vi skal finne likningen for kuleflaten og koordinatene til P.



Likningen for kula er $(x-2)^2 + (y-9)^2 + (z-2)^2 = r^2$.
r er avstanden fra sentrum i kula til tangeringsplanet. Vi bruker avstandsformelen på side 59.

$$r = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 \cdot 2 - 2 \cdot 9 + 2 \cdot 2 - 15|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|-27|}{\sqrt{9}} = \frac{27}{3} = 9$$

Kuleflaten har altså likningen $(x-2)^2 + (y-9)^2 + (z-2)^2 = 81$.
Tangeringspunktet P er skjæringspunktet mellom tangeringsplanet og normalen n til dette planet gjennom S. Normalen har retningsvektor lik normalvektoren til planet, $\vec{v} = [1, -2, 2]$.
Parameterframstillingen for normalen er $x = 2 + t \wedge y = 9 - 2t \wedge z = 2 + 2t$.
Vi finner parameterverdien for skjæringspunktet P:

$$\begin{aligned} 2 + t - 2 \cdot (9 - 2t) + 2 \cdot (2 + 2t) - 15 &= 0 \\ 2 + t - 18 + 4t + 4 + 4t - 15 &= 0 \\ 9t &= 27 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

Skjæringspunktet er $P = (5, 3, 8)$.

Oppgave 1.48

a En kule har radius lik 8. Finn arealet av et kulesegment med høyde 2.

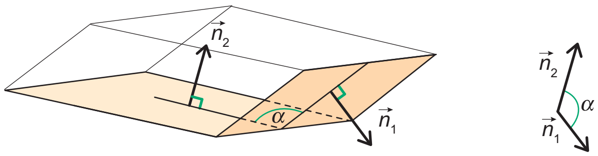
b Planet $x - 2y + 2z - 9 = 0$ deler kuleflaten gitt ved $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ i to. Finn overflaten av den største delen.

c Kuleflaten gitt ved $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 49$ deles av planet $2x + 3y - 6z + 2 = 0$. Finn forholdet mellom overflaten av den største og den minste delen av kuleflaten.

Plane romfigurer

En romfigur der alle sideflater er plane, kaller vi en plan romfigur. En plan romfigur er begrenset av fire eller flere plan.

Vi har tidligere sett at vinkelen mellom to plan er en vinkel i intervallet $[0°, 90°]$. Men vinkelen mellom to sideflater i en romfigur kan være større enn $90°$.



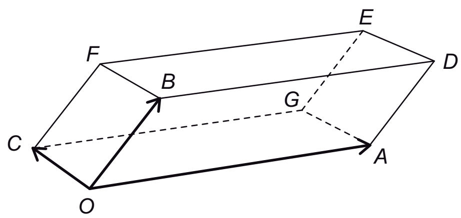
De to markerte firkantene på figuren viser to sideflater som er deler av en romfigur. Vinkelen mellom de to sideflatene er lik vinkelen mellom normalvektorene $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$ til sideflatene. Det hadde ikke vært tilfellet hvis *begge* normalvektorene hadde pekt «ut av» romfiguren, eller hvis *begge* normalvektorene hadde pekt «inn i» romfiguren.

Når vi skal finne vinkelen mellom to sideflater i en plan romfigur, velger vi altså normalvektorene til sideflatene, slik at den ene har retning «ut av» romfiguren og den andre har retning «inn i» romfiguren.

I de tre neste eksemplene får vi bruk for mye av det vi har vært gjennom i dette kapitlet.

Eksempel 5 Overflate av parallellepiped og vinkelen mellom sideflater

Fire av hjørnene i et parallellepiped er $O=(0,0,0)$, $A=(0,4,0)$, $B=(-1,1,2)$ og $C=(0,1,-1)$. OA, OB og OC er tre kanter.
Vi skal finne overflaten av parallellepipedet, og bestemme vinkelen mellom sideflatene $OADB$ og $OAGC$.



Vi bruker vektorproduktet til å regne ut arealet av $OADB$, $OBFC$ og $OAGC$.

$$OADB\text{: Areal} = \left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right| = \left|[0,4,0]\times[-1,1,2]\right| = \left|[8,0,4]\right| = \sqrt{8^2+0^2+4^2} = \sqrt{80}$$

$$OBFC\text{: Areal} = \left|\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\right| = \left|[-1,1,2]\times[0,1,-1]\right|$$
$$= \left|[-3,-1,-1]\right| = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{11}$$

$$OAGC\text{: Areal} = \left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}\right| = \left|[0,4,0]\times[0,1,-1]\right| = \left|[-4,0,0]\right| = 4$$

I et parallellepiped er to og to sideflater like.
Overflaten av parallellepipedet er derfor $2\cdot\left(\sqrt{80}+\sqrt{11}+4\right) = 32{,}5$.

For å bestemme vinkelen mellom sideflatene *OADB* og *OAGC* trenger vi to normalvektorer, der den ene peker «ut av» parallellepipedet og den andre «inn i» parallellepipedet.
$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = [8, 0, 4]$ er en normalvektor til *OADB*. Ved bruk av høyrehåndsregelen finner vi at vektoren peker ut av parallellepipedet. $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} = [-4, 0, 0]$ er en normalvektor til *OAGC* som peker inn i parallellepipedet.
Vinkelen mellom sideflatene er derfor vinkelen α mellom $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ og $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}$.

$$\cos\alpha = \frac{[8, 0, 4] \cdot [-4, 0, 0]}{\sqrt{8^2 + 0^2 + 4^2} \cdot \sqrt{(-4)^2}} = \frac{-32}{4\sqrt{80}} = \frac{-8}{\sqrt{80}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-8}{\sqrt{80}}\right) = 153{,}4°$$

Vinkelen mellom de to sideflatene er $153°$.

Parallellepipeder ...

Oppgave 1.49

Et tetraeder har hjørner $O = (0, 0\ \ 0)$, $A = (4, 2\ \ 1)$, $B = (2, 5, 2)$ og $C = (1, -4, 6)$.

a Regn ut volumet av tetraedret.
b Finn overflaten av tetraedret.
c Bestem vinkelen mellom kantene *AB* og *AC*.
d Bestem vinkelen mellom sideflatene *OAB* og *OAC*.

Eksempel 6 Tetraeder

Et tetraeder er begrenset av planene $y = 0$, $z = 0$, $2x + z - 6 = 0$ og $x - y - z + 6 = 0$.
Vi skal bestemme volumet av tetraedret ved hjelp av et volumprodukt.
Før vi kan beregne volumet, må vi bestemme koordinatene til hjørnene i tetraedret.
Hvert hjørne er skjæringspunktet mellom tre av de fire planene.

$$\begin{array}{ll} y = 0 & \text{I} \\ z = 0 & \text{II} \\ 2x + z - 6 = 0 & \text{III} \end{array}$$

Vi setter inn $y = 0$ og $z = 0$ i likning III. Det gir $x = 3$. $A = (3, 0, 0)$ er et hjørne i tetraedret.

$$\begin{array}{ll} z = 0 & \text{II} \\ 2x + z - 6 = 0 & \text{III} \\ x - y - z + 6 = 0 & \text{IV} \end{array}$$

Vi setter $z = 0$ i III. Det gir $x = 3$. Så setter vi $z = 0$ og $x = 3$ inn i IV. Da finner vi hjørnet $B = (3, 9, 0)$.

$$\begin{array}{ll} y = 0 & \text{I} \\ z = 0 & \text{II} \\ x - y - z + 6 = 0 & \text{IV} \end{array}$$

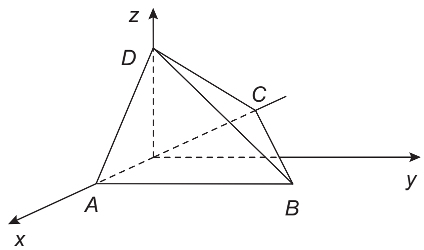
Her får vi skjæringspunktet $C = (-6, 0, 0)$.
Det siste hjørnet er skjæringspunktet mellom

$$\begin{array}{ll} y = 0 & \text{I} \\ 2x + z - 6 = 0 & \text{III} \\ x - y - z + 6 = 0 & \text{IV} \end{array}$$

Setter vi inn 0 for y i den siste likningen, får vi likningene

$$\begin{array}{ll} 2x + z - 6 = 0 & \text{III} \\ x - z + 6 = 0 & \text{IV} \end{array}$$

Adderer vi likningene, får vi $3x = 0$.
Det gir $x = 0$ og $z = 6$. Det siste hjørnet har altså koordinatene $D = (0, 0, 6)$.



Volumet av tetraedret $ABCD$ finner vi nå ved å bruke volumprodukt.
$\overrightarrow{AB} = [0, 9, 0] = 9 \cdot [0, 1, 0]$, $\overrightarrow{AC} = [-9, 0, 0] = -9 \cdot [1, 0, 0]$ og $\overrightarrow{AD} = [-3, 0, 6]$.
Vi velger å ta vektorproduktet av de to første vektorene. Det gir enklest regning.

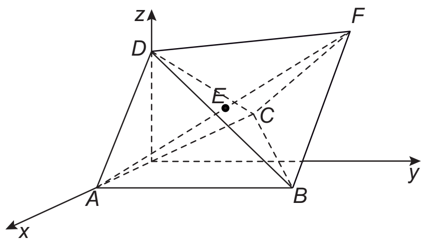
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 9 \cdot [0, 1, 0] \times (-9) \cdot [1, 0, 0] = 9 \cdot (-9) \cdot [0, 0, -1] = [0, 0, 81]$$

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|[0, 0, 81] \cdot [-3, 0, 6]\right| = \frac{1}{6}\left|0 + 0 + 81 \cdot 6\right| = 81$$

Volumet av tetraedret er altså 81.

Eksempel 7 To tetraedre – symmetri om plan

Vi ser på tetraedret i eksempel 6. Vi skal finne koordinatene til et punkt som sammen med de tre punktene B, C og D i planet $x-y-z+6=0$ danner et tetraeder med samme volum og samme overflate som tetraedret $ABCD$.



Vi kaller planet $x-y-z+6=0$ for Π og lar BCD være grunnflaten i tetraedret. Da er avstanden fra A til Π høyde i tetraedret $ABCD$. Et hvert punkt F som har samme avstand til Π, gir et tetraeder $BCDF$ med samme volum som tetraedret $ABCD$.
Ved å la F ligge på en normal fra A på planet Π er vi også sikret at overflatene til de to tetraedrene blir like. Tetraedrene er da symmetriske om Π.
Vi finner først det punktet i Π som ligger nærmest A. Dette punktet kaller vi E.
E er skjæringspunktet mellom Π og en normal på Π som går gjennom A.
Linja normalt på Π, $x-y-z+6=0$, har retningsvektoren $\vec{n}=[1,-1,-1]$.
Fordi linja også skal gå gjennom $A=(3,0,0)$, får normalen parameterframstillingen:

$$x=3+t \ \wedge\ y=-t \ \wedge\ z=-t$$

Vi setter uttrykkene for x, y og z inn i likningen for Π.

$$\begin{aligned} 3+t-(-t)-(-t)+6&=0\\ 3t+9&=0\\ t&=-3 \end{aligned}$$

Skjæringspunktet E har koordinatene $(3+(-3),-(-3),-(-3))=(0,3,3)$.

$$\overrightarrow{AE}=[0-3,3-0,3-0]=[-3,3,3]$$

Posisjonsvektoren til F er $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{AE}=[0,3,3]+[-3,3,3]=[-3,6,6]$.
F har altså koordinatene $(-3,6,6)$.

Oppgave 1.50

Et tetraeder er begrenset av fire plan, $y=0$, $z=0$, $x+y=0$ og $2x+z-2=0$.

a Bestem hjørnene i tetraedret.

b En plan romfigur har de samme hjørnene som tetraedret i oppgave a. I tillegg har figuren et hjørne P som ligger på normalen på $2x+z-2=0$ gjennom origo. Finn koordinatene til P når origo og P ligger symmetrisk om planet $2x+z-2=0$.

c Hva er volumet av romfiguren i oppgave b?

Sti 1 | Sti 2 | Sti 3

Stifinner: side 324

KAPITTELTEST

1.A

P er et punkt på z-aksen, fem enheter over xy-planet. $Q=(1,-2,-3)$.

a Finn $\overrightarrow{PQ}$.

b Hva er lengden av $\overrightarrow{PQ}$?

c Bestem koordinatene til punktet R når $\overrightarrow{QR}=[3,0,-1]$.

d Bestem koordinatene til punktet S når $\overrightarrow{PS}=2\vec{e}_y-5\vec{e}_z$.

1.B

Linja l er gitt ved $[x,y,z]=[-6,2,3]+t\cdot[2,2,-1]$.

a En annen rett linje m går gjennom $(4,2,-1)$ og er parallell med l. Finn en parameterframstilling for m.

b Finn skjæringspunktet mellom l og y-aksen. Skjærer linja x- eller z-aksen?

c Regn ut avstanden mellom l og m.

1.C

Et plan går gjennom punktene $P=(0,2,1)$, $Q=(1,0,3)$ og $R=(4,2,-1)$.

a Finn en parameterframstilling for planet.

b Finn en likning for planet.

c Hva er arealet av trekanten PQR?

d Undersøk om $S=(6,5,1)$ ligger i samme plan som P, Q og R.

e Regn ut volumet av tetraedret $PQRS$.

1.D

Planene Π og Σ er gitt ved $x-2y+2z=12$ og $3x-y=4$.

a Finn vinkelen mellom planene.

b Finn en parameterframstilling for skjæringslinja mellom Π og Σ.

c Et plan Ω går gjennom punktet $(2,-3,-1)$ og er parallelt med Π. Bestem avstanden mellom Π og Ω.

1.E

Planet Π er gitt ved $4x-2y+3z=12$.

a Finn skjæringspunktene mellom Π og koordinataksene, og skisser hvordan planet ligger i et koordinatsystem.

b En rett linje l har parameterframstillingen $x=2+2t \;\wedge\; y=3t-1 \;\wedge\; z=1-t$. Forklar at l må skjære Π og finn skjæringspunktet.

c Bestem vinkelen mellom l og Π.

1.F

a Finn likningen til en kuleflate med sentrum $S=(2,-3,1)$ og radius 6.

b Bestem sentrum og radius for kuleflaten gitt ved $x^2+y^2+z^2-10x-2y+2z=22$.

c Planet $2x-y+2z-25=0$ skjærer kuleflaten i oppgave b i to deler. Finn overflaten av det største av de to kulesegmentene.

1.G

Punktene $A=(-2,1,0)$, $B=(3,4,0)$ og $C=(2,-2,0)$ danner grunnflaten i et trekantet prisme. Fra disse tre punktene går det kanter til henholdsvis D, E og F.

a Bestem koordinatene til E og F når $D=(0,2,4)$.

b Finn vinkelen mellom kantene AB og AD.

c Finn vinkelen mellom sideflaten $ABED$ og grunnflaten.

d Punktene A, B, C og D er hjørner i en trekantet pyramide. Finn volumet av pyramiden $ABCD$ på to måter.

e Punktene A og G ligger symmetrisk om planet gjennom B, C og D. Bestem koordinatene til G.

SAMMENDRAG

Vektorregning

$[x_1, y_1, z_1] \pm [x_2, y_2, z_2]$
$= [x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2]$
$k \cdot [x_1, y_1, z_1] = [kx_1, ky_1, kz_1]$

Skalarprodukt

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$, der α er vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

$[x_1, y_1, z_1] \cdot [x_2, y_2, z_2] = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{v}$

Vinkel mellom to vektorer

Vinkelen α mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt ved

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}.$$

Vektorprodukt

- $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$, der α er vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
- $\vec{u} \times \vec{v}$ står vinkelrett på både $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{u} \times \vec{v}$ danner et høyrehånds system.

$\vec{u} \times \vec{v} = [x_1, y_1, z_1] \times [x_2, y_2, z_2]$
$= [y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2, z_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot z_2, x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2]$

Areal og vektorprodukt

Et parallellogram utspent av vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$, har arealet $G = |\vec{u} \times \vec{v}|$.

En trekant utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ har arealet

$$G = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|.$$

Volumprodukt

Volumet av et parallellepiped utspent av $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$, er

$V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})|$.

Likning for en kuleflate

En kuleflate med radius r og sentrum i (x_0, y_0, z_0), har likningen

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$.

Kulesegment

Overflaten av et kulesegment med høyde h i en kule med radius r er $S = 2\pi rh$.

Likning for et plan

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ er likningen for et plan som går gjennom punktet (x_0, y_0, z_0) og har normalvektoren $\vec{n} = [a, b, c]$.

$$x = x_0 + a_1 s + a_2 t \quad \wedge \quad y = y_0 + b_1 s + b_2 t$$
$$\wedge \quad z = z_0 + c_1 s + c_2 t$$

er parameterframstilling for et plan som går gjennom (x_0, y_0, z_0) og er parallelt med $\vec{u} = [a_1, b_1, c_1]$ og $\vec{v} = [a_2, b_2, c_2]$.

Linjer i rommet

$$x = x_0 + at \quad \wedge \quad y = y_0 + bt \quad \wedge \quad z = z_0 + ct$$

er en parameterframstilling for en linje som går gjennom (x_0, y_0, z_0), og som har retningsvektoren $\vec{v} = [a, b, c]$.

Avstand fra punkt til linje

Avstanden fra et punkt P til en linje som går gjennom punktet Q og har retningsvektoren $\vec{v}$, er $D = \dfrac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$.

Avstand fra punkt til plan

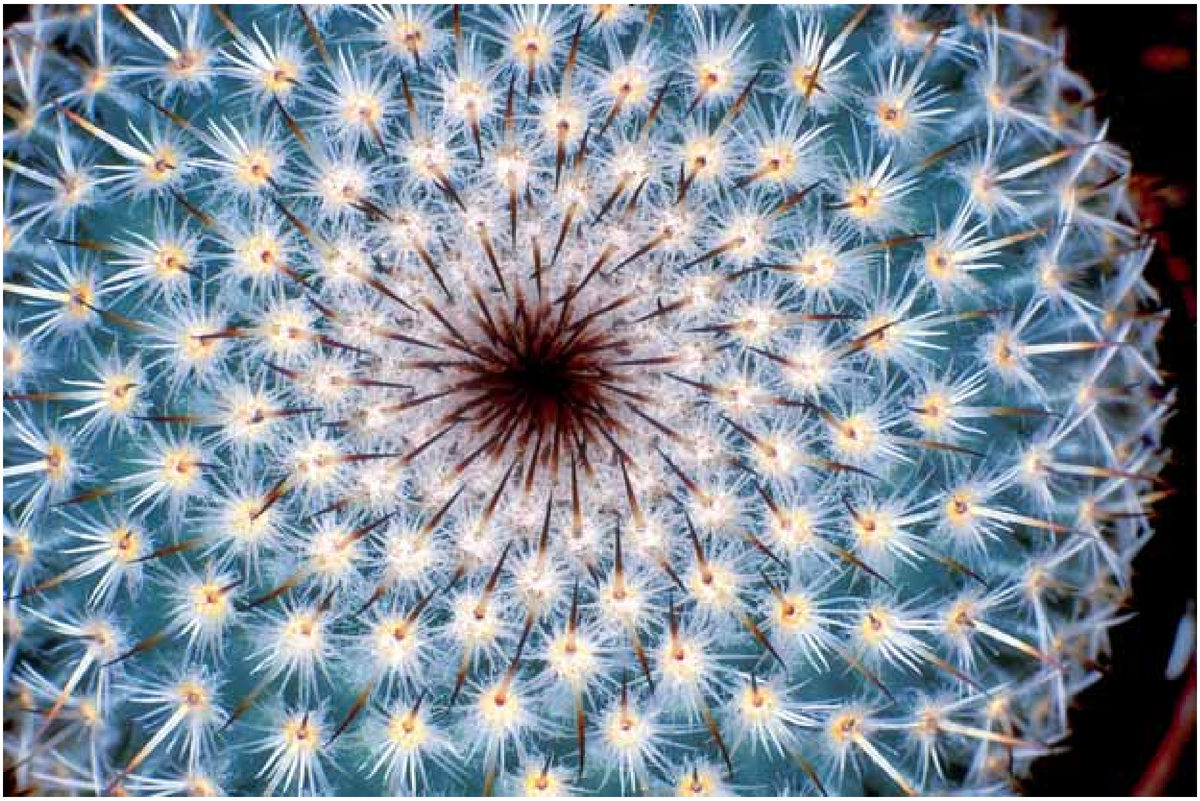
Avstanden fra punktet $P = (x_1, y_1, z_1)$ til planet $ax + by + cz + d = 0$ er

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Norsk-engelsk

normal **perpendicular**
parameterframstilling **parametric equation**
plan **plane**
retningsvektor **direction vector**
skjæringslinje **line of intersection**
tetraeder **tetrahedron**
tredimensjonalt rom **three-dimensional space**
vektorprodukt **vector product, cross product**
vindskeive linjer **scew lines**
volumprodukt **scalar triple product**

2 Algebra



Fibonaccitall i naturen

AKTIVITET: Oppdag mønstret!

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 3 & & 5 & & & \\
 & & 7 & & 9 & & 11 & & \\
 & 13 & & 15 & & 17 & & 19 & \\
21 & & 23 & & 25 & & 27 & & 29 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

Hva er summen av tallene på linje nummer 100 i denne oppstillingen?

2.1 TALLFØLGER

I 2.1 skal du lære å finne mønstre i tallfølger, og bruke formler til å uttrykke og analysere mønstrene.

Tall som står etter hverandre i en bestemt rekkefølge, kaller vi en tallfølge.

La oss se på tallfølgen

$$1, 3, 5, 7, 9, 11$$

Tallfølgen består av de seks første oddetallene i stigende rekkefølge. Vi sier at den er en *endelig* tallfølge med seks *ledd*.

Oddetallene under 100 kan vi skrive som

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 99$$

Dette er en endelig tallfølge med 50 ledd.
Legg merke til hvordan vi sløyfer mange av leddene og erstatter dem med tre prikker når mønstret er tydelig.

Alle oddetallene kan vi skrive som

$$1, 3, 5, 7, \ldots$$

Dette er en *uendelig* tallfølge.
De tre prikkene forteller at de neste leddene skal følge samme mønster som de fire første. Her får vi neste tall ved å legge til 2.

Noen ganger er mønstret i en tallfølge opplagt. Hvis ikke, hjelper det ofte å ta seg tid til å beskrive leddene eller sammenhengen mellom dem nøye.

Eksempel 1 Neste ledd

Vi skal finne neste ledd i noen uendelige tallfølger.

$$1, 3, 9, 27, 81, \ldots \qquad (1)$$

Her kommer vi fra ett ledd til det neste ved å multiplisere med 3.
Neste ledd er derfor $81 \cdot 3 = 243$.

$$1, 5, 10, 16, 23, \ldots \qquad (2)$$

Mønstret blir mer tydelig hvis vi beskriver sammenhengen mellom leddene.
Vi kommer fra 1 til 5 ved å legge til 4, fra 5 til 10 ved å legge til 5, fra 10 til 16 ved å legge til 6 og fra 16 til 23 ved å legge til 7. Mønstret er altså at vi legger til én mer for hvert nytt ledd.
Neste ledd er derfor $23 + 8 = 31$.

$$1, 8, 27, 64, 125, \ldots \qquad (3)$$

Her ser vi et tydelig mønster hvis vi gjenkjenner tallene som potenser: $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, \ldots$.
Vi kaller dem *kubikktall*. Mønstret er altså at vi har leddnummeret i tredje potens.
Neste ledd er derfor $6^3 = 216$.

Oppgave 2.1

Beskriv mønstret i tallfølgen og skriv opp det neste leddet.

a 4, 8, 12, 16, … **b** 10, 8, 6, 4, …

c 1, 2, 4, 7, 11, … **d** 1, 4, 16, 64, 256, …

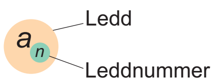
e 1, −3, 9, −27, 81, … **f** 1, 4, 9, 16, 25, …

Oppgave 2.2

Finn det manglende leddet i tallfølgen.

a 0, 2, 4, ?, 8 **b** 2, ?, 8, 16, 32

c 11, 8, ?, 2, −1 **d** ?, 8, 18, 32, 50



Det er vanlig å la a_1 stå for det første leddet i en tallfølge, a_2 for det andre leddet, og så videre.
Indeksene 1, 2, … viser hvilket nummer i tallfølgen leddet har.

Vi oppsummerer i en definisjon på tallfølger:

> En tallfølge er en oppramsing av tall i en bestemt rekkefølge.
> $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ er en endelig tallfølge med n ledd.
> $a_1, a_2, a_3, \ldots$ er en uendelig tallfølge, der de neste leddene følger samme mønster som de første.

Ikke alle tallfølger har ledd som danner et mønster.
Hvis du kaster en terning ti ganger og får

3, 3, 4, 3, 2, 5, 1, 6, 6, 4

er dette en endelig tallfølge med ti ledd. Leddene danner ikke noe mønster, og det er umulig å si hva du vil få i det ellevte kastet på grunnlag av de ti første kastene.

Men i tallfølgene vi skal arbeide med i dette kapitlet, danner leddene tydelige mønstre. Slike mønstre kan vi enten beskrive med ord, eller vi kan lage en formel for ledd nr. n i tallfølgen, a_n.

Det fins to typer formler vi kan bruke i denne sammenhengen – *rekursive* og *eksplisitte*.

Rekursive formler

rekursiv (adj.) = som kan gjentas

I *rekursive* formler beskriver vi som regel hvordan det neste leddet i tallfølgen avhenger av leddet foran. En slik formel lar oss med andre ord regne ut a_n når vi kjenner a_{n-1}.

Eksempel 2 Å bruke rekursive formler

Vi har formelen $a_n = 2a_{n-1}$. Vi skal finne de seks første leddene i tallfølgen når det første leddet er 1.

Formelen sier at vi kommer fra ett ledd til det neste ved å multiplisere med 2.

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 1 = 2$$
$$a_3 = 2a_2 = 2 \cdot 2 = 4$$
$$a_4 = 2a_3 = 2 \cdot 4 = 8$$
$$a_5 = 2a_4 = 2 \cdot 8 = 16$$
$$a_6 = 2a_5 = 2 \cdot 16 = 32$$

De seks første leddene i tallfølgen er $1, 2, 4, 8, 16, 32$.

Legg merke til at vi må kjenne ett av leddene i tallfølgen for å kunne skrive den ut. I eksemplet ovenfor kjente vi det første leddet, men vi kunne like gjerne ha fått oppgitt ett av de andre. Hvis vi for eksempel får vite at det fjerde leddet er 8, bruker vi rekursjonsformelen som den står, til å finne a_5 og a_6. For å finne de tre første leddene lager vi en formel for a_{n-1}:

$$a_n = 2a_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad a_{n-1} = \frac{a_n}{2}$$

Kontroller selv at vi får de samme leddene som i eksemplet!

I eksemplet nedenfor viser vi hvordan du selv kan finne rekursive formler for å beskrive mønstret i en tallfølge.

Eksempel 3 Å finne rekursive formler

Vi ser først på tallfølgen $5, 11, 17, 23, \ldots$.
Her kommer vi fra ett ledd til det neste ved å legge til 6.
Den rekursive formelen er derfor $a_n = a_{n-1} + 6$.

Så tar vi for oss tallfølgen $1, 3, 7, 15, 31, \ldots$.
Her kommer vi fra ett ledd til det neste ved først å multiplisere med 2 og deretter legge til 1.
Den rekursive formelen er derfor $a_n = 2a_{n-1} + 1$.

Til slutt tar vi for oss tallfølgen $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$.
Her må vi stadig legge til én mer for å komme til neste ledd. For å se den rekursive formelen lønner det seg ofte å skrive opp leddene systematisk under hverandre.

$$a_2 = a_1 + 2$$
$$a_3 = a_2 + 3$$
$$a_4 = a_3 + 4$$
$$\vdots$$

Vi ser at et ledd er summen av leddet foran og leddnummeret.
Den rekursive formelen er derfor $a_n = a_{n-1} + n$.

Oppgave 2.3

Skriv opp de fem første leddene i tallfølgen.

a $a_n = a_{n-1} + 3$, der $a_1 = 10$

b $b_n = 5b_{n-1}$, der $b_5 = 625$

c $c_n = 3c_{n-1} - 2$, der $c_3 = 10$

d $d_n = 3d_{n-1} - 2n + 7$, der $d_1 = 4$

Oppgave 2.4

Lag en rekursiv formel for det n-te leddet i tallfølgen.

a $14, 11, 8, 5, \ldots$

b $20, 10, 5, \frac{5}{2}, \ldots$

c $2, 5, 14, 41, \ldots$

d $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, -2, 4, \ldots$

e $1, 5, 11, 19, 29, \ldots$

f $1, 2, 4, 7, 11, \ldots$

Eksempel 4 Fibonaccifølgen

Tallfølgen $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ kaller vi *fibonaccifølgen*, etter den italienske matematikeren Leonardo Fibonacci (ca. 1170–1250). Vi vil finne en rekursiv formel for denne tallfølgen.

Vi observerer at

$$2 = 1 + 1$$
$$3 = 1 + 2$$
$$5 = 2 + 3$$
$$8 = 3 + 5$$
$$\vdots$$

Neste ledd er altså summen av de to foregående leddene.
Den rekursive formelen er derfor $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$. Formelen gjelder når $n \geq 3$.

I kaktusbildet på side 74 kan du finne spiraler som dreier mot høyre og mot venstre. Hvor mange finner du av hver type? (Du kan skrive ut bildet fra nettstedet på Lokus.)

Vi finner eksempler på spiralformer også i mange andre planter. Det viser seg ofte at antall spiraler i hver retning er et av tallene i fibonaccifølgen.

Fibonaccifølgen er et eksempel på at rekursjonsformler for a_n kan inneholde flere av de foregående leddene i tallfølgen.

Eksplisitte formler

eksplisitt (adj.) = klar, tydelig, direkte

I *eksplisitte* formler beskriver vi sammenhengen mellom leddnummeret og selve leddet i tallfølgen. Vi kan altså regne ut a_n når vi kjenner n.

Eksempel 5 Å bruke eksplisitte formler

Vi skal finne de seks første leddene i tallfølgen gitt ved $a_n = 3n^2 - 10$.

Formelen gir

$$a_1 = 3 \cdot 1^2 - 10 = -7$$

$$a_2 = 3 \cdot 2^2 - 10 = 2$$

$$a_3 = 3 \cdot 3^2 - 10 = 17$$

$$a_4 = 3 \cdot 4^2 - 10 = 38$$

$$a_5 = 3 \cdot 5^2 - 10 = 65$$

$$a_6 = 3 \cdot 6^2 - 10 = 98$$

De seks første leddene i tallfølgen er derfor $-7, 2, 17, 38, 65, 98$.

Vi skal nå vise hvordan du kan tenke for å lage eksplisitte formler for tallfølger. Det er vanskelig å gi en oppskrift, så vi gir noen eksempler som viser ulike måter å angripe oppgaven.

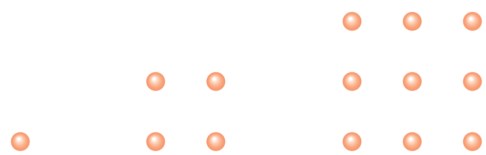
Eksempel 6 Kvadrattall og kubikktall

Vi skal finne en eksplisitt formel for tallfølgen

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots$$

Disse tallene kan skrives som potenser med 2 som eksponent:

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots$$



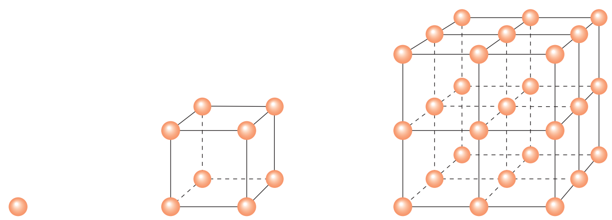
Kvadrattall

Da ser du fort mønstret:
Vi finner leddet ved å kvadrere leddnummeret.
Den eksplisitte formelen er derfor $a_n = n^2$.

I eksempel 1 så vi at tallfølgen

$$1, 8, 27, 64, 125, \ldots$$

kunne skrives som $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, \ldots$



Kubikktall

Formelen for det n-te leddet er derfor $a_n = n^3$.

Eksempel 7 Trekanttall

Vi tar for oss tallfølgen $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

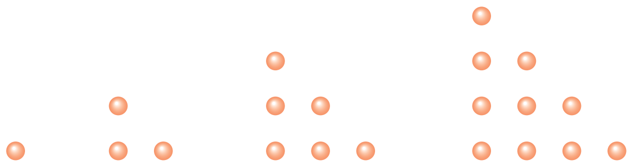
Et trenet øye ser at vi kan skrive tallfølgen slik:

$$\frac{1 \cdot 2}{2}, \frac{2 \cdot 3}{2}, \frac{3 \cdot 4}{2}, \frac{4 \cdot 5}{2}, \frac{5 \cdot 6}{2}, \ldots$$

Mønstret er altså at vi får fram et ledd ved å finne halvparten av produktet av leddnummeret og neste leddnummer.

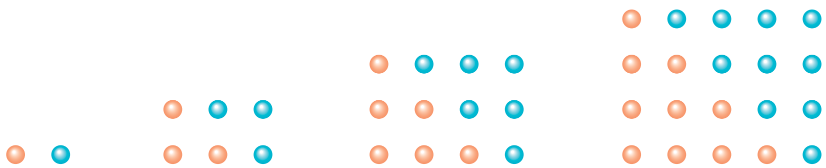
Med symboler får vi $a_n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Det er også mulig å lage figurer for å se sammenhengen.



Vi illustrerer de fire første leddene i tallfølgen med kuler som danner «trekanter».

Så lager vi figur av en ny tallfølge, der leddene er dobbelt så store som i den opprinnelige.
Av figuren ser vi at dette svarer til å legge to like «trekanter» inntil hverandre slik at de danner «rektangler».



Antall kuler i disse rektanglene er $1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4,\ 4 \cdot 5, \ldots$.
I rektangel nr. n har vi altså $n \cdot (n+1)$ kuler.
Da må det være halvparten så mange kuler i trekant nr. n, dvs. $\dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Formelen for antall kuler i trekant nummer n er den samme som vi fant ovenfor for ledd nummer n i tallfølgen.

Trekanttall

Oppgave 2.5

Skriv opp de fem første leddene i tallfølgen.

a $a_n = n + 2$ **b** $b_n = 4n + 1$ **c** $c_n = 2 \cdot 3^{n-3}$

Oppgave 2.6

Finn en eksplisitt formel for det n-te leddet i tallfølgen.

a $2, 4, 6, 8, \ldots$ **b** $0, 2, 4, 6, \ldots$

c $1, 3, 5, 7, \ldots$ **d** $2, 6, 12, 20, \ldots$

e $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$ **f** $1, -2, 4, -8, \ldots$

Digitale verktøy kan være til stor nytte når vi arbeider med tallfølger. Neste eksempel viser bare noe av det vi kan få til.

Eksempel 8 Tallfølger med digitale verktøy

Vi vil først finne leddene i tallfølgen $a_n = 2n^2 + n - 1$ ved hjelp av et regneark.

Da går vi fram slik:

1 Legg inn tallet 1 i celle A1.
2 Skriv inn formelen =A1+1 i A2, og kopier den nedover kolonne A.
3 Skriv inn formelen =2*A1^2+A1-1 i B1 og kopier den nedover kolonne B.

Resultatet ser du på figuren til venstre.
Bare fantasien setter grenser for hva du kan eksperimentere med videre.
Til høyre ser du resultatet av at vi i celle A1 legger inn -5 i stedet for 1.

B1 fx =2*A1^2+A1-1

	A	B	C
1	1	2	
2	2	9	
3	3	20	
4	4	35	
5	5	54	
6	6	77	
7	7	104	
8	8	135	
9	9	170	
10	10	209	

B1 fx =2*A1^2+A1-1

	A	B	C
1	-5	44	
2	-4	27	
3	-3	14	
4	-2	5	
5	-1	0	
6	0	-1	
7	1	2	
8	2	9	
9	3	20	
10	4	35	

Ofte kan vi også gå andre veien:
Det fins mange digitale verktøy som kan hjelpe oss med å finne et uttrykk for det n-te leddet i en tallfølge.

Vi vil finne den eksplisitte formelen for trekanttallene fra eksempel 7.

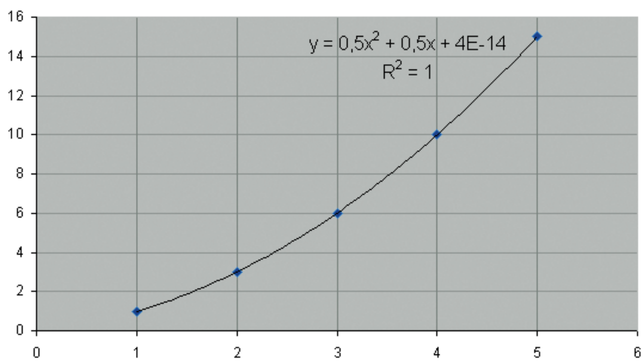
Da går vi fram slik:

1 Legg inn leddnumrene i en liste og leddene i en annen liste.
2 Se hvordan punktene $(x\,,\,y)$, der x er leddnummeret og y er leddet, ligger i et koordinatsystem.
3 Velg eller prøv deg fram til du finner en aktuell regresjonsfunksjon. Her blir det en andregradsfunksjon.
4 Kontroller at grafen går nøyaktig gjennom punktene.

Skjermbildet fra regnearket Excel viser at resultatet er $y = 0,5x^2 + 0,5x$, for $4 \cdot 10^{-14} \approx 0$.

Dette er samme tallfølgen som

$$a_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} = 0,5n^2 + 0,5n$$



Sti 1 | Sti 2 | Sti 3

Stifinner: side 331

Oppgave 2.7
Bruk digitalt verktøy til å finne en eksplisitt formel for det *n*-te leddet i tallfølgen.
a $1, 5, 10, 16, 23, \dots$ **b** $3, 17, 55, 129, 251, \dots$

2.2 REKKER

I 2.2 skal du lære å summere rekker med og uten digitale verktøy.

Summen av leddene i en tallfølge kaller vi en *rekke*.

Av tallfølgen

$$1, 3, 9, 27, 81, 243$$

kan vi lage rekka

$$1+3+9+27+81+243$$

Hvis rekka er uendelig, skriver vi

$$1+3+9+27+\dots$$

Summen av de to første leddene skriver vi $S_2 = 1+3 = 4$.
Summen av de tre første leddene er $S_3 = 1+3+9 = 13$.

På samme måte som for tallfølger kan vi bruke a_1 som symbol for det første leddet i rekka, a_2 for det andre leddet, og så videre. Rekka ovenfor er gitt ved formelen

$$a_n = 3^{n-1}$$

der n er leddnummeret.

Oppgave 2.8
Ta for deg rekka $2+4+8+16+\dots$.
a Finn en formel for det *n*-te leddet i rekka.
b Finn summen av de fem første leddene i rekka.

Oppgave 2.9
Leddene i en rekke er gitt ved formelen $a_n = 4n-1$.
a Skriv opp de seks første leddene i rekka.
b Finn S_2 og S_6.

Ut fra én rekke kan vi regne ut mange summer:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Ofte er vi ute etter å finne en formel for summen av de n første leddene i en rekke. Summene danner tallfølgen

$$S_1\,,\ S_2\,,\ S_3\,,\ \ldots,\ S_n$$

og vi er med andre ord ute etter å finne en eksplisitt formel for den n-te summen, S_n.

Eksempel 1 Oddetallsrekka

Vi vil finne en formel for summen av de n første oddetallene.

Oddetallene danner rekka $1+3+5+7+\ldots$.

Vi får summene

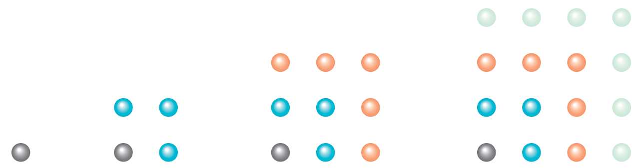
$S_1 = 1$

$S_2 = 1+3 = 4$

$S_3 = 1+3+5 = 9$

$S_4 = 1+3+5+7 = 16$

osv.



Summene danner tallfølgen $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots,$ som vi kjenner igjen som kvadrattallene. Den n-te summen er $S_n = n^2$. Summen av de n første oddetallene er derfor n^2.

Pingviner i rekke

Oppgave 2.10

Ta for deg rekka $1+7+19+37+61+\dots$.

a Skriv opp summene S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, … .

b Finn en formel for summen av de n første leddene i rekka.

c Finn S_{100}.

Oppgave 2.11

a Skriv opp starten på partallsrekka.

b Finn en formel for summen av de n første partallene.

c Finn summen av rekka $2+4+6+\dots+246$.

I oppgavene ovenfor så du at det er en enkel sak å finne en spesiell sum når formelen for S_n er kjent, eller er lett å finne. I motsatt fall bør vi overlate utregningen til et digitalt verktøy.

Eksempel 2 Rekker med digitalt verktøy

Vi skal bruke digitalt verktøy til å finne summen av de 100 første leddene i rekka $a_n = 4n - 1$.

Skjermbildet nedenfor viser to vanlige kommandoer for summering når vi kjenner det n-te leddet.

sum(seq(4·n−1,n,1,100))	20100
$\sum_{n=1}^{100} (4\cdot n-1)$	20100

Som du ser, får vi $S_{100} = 20\,100$ uansett kommando.
Undersøk hvordan du kan finne summer på det digitale verktøyet du bruker.

Σ er den greske bokstaven *sigma*.

Legg merke til symbolet Σ som alternativ skrivemåte for en sum. Vi kaller det *sumtegnet*.

Under og over sumtegnet står startverdi og sluttverdi for den variable størrelsen i uttrykket. Vi kaller det *nedre* og *øvre summasjonsgrense*.

La oss se på noen eksempler på bruken av sumtegnet.

Eksempel 3 Sumtegnet Σ

Vi regner ut noen summer for hånd:

$$\sum_{n=1}^{4}(6n-5) = (6\cdot1-5)+(6\cdot2-5)+(6\cdot3-5)+(6\cdot4-5) = 1+7+13+19 = 40$$

$$\sum_{n=3}^{5}(6n-5) = (6\cdot3-5)+(6\cdot4-5)+(6\cdot5-5) = 13+19+25 = 57$$

Sumtegnet er en effektiv skrivemåte for rekker.

For eksempel kan vi skrive summen av de n første naturlige tallene som $\sum_{i=1}^{n} i$:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\ldots+n$$

Summen av de n første kvadrattallene kan vi skrive $\sum_{i=1}^{n} i^2$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$$

Legg merke til at vi bruker i som variabel når n er én av summasjonsgrensene. Vi kan like gjerne bruke x eller et annet symbol for den variable. Rekka blir den samme:

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$$

Summen av de n første leddene i en rekke kan vi skrive slik:

$$S_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Når vi skriver S_n, betyr det at vi skal legge sammen de n første leddene i en rekke.
En fordel med sumtegnet er at vi ikke behøver å starte med det første leddet. For eksempel kan vi skrive summen av de 31 leddene fra femtiende til åttiende ledd i en rekke som

$$\sum_{i=50}^{80} a_i$$

Det er det samme som $S_{80} - S_{49}$.

Oppgave 2.12
Bruk digitalt verktøy til å finne summen av de første 100 leddene i rekka.

a $a_n = 2n-1$ b $b_n = n^2+n$ c $c_n = 5000\cdot 1{,}23^{n-1}$

Oppgave 2.13
Skriv ut rekka og regn ut summen for hånd.

a $\sum_{n=1}^{5} n$ b $\sum_{i=1}^{4} 2^{i-1}$ c $\sum_{x=3}^{5} \left(x^3-x+2\right)$

Oppgave 2.14
Skriv rekka ved hjelp av sumtegnet.
Regn deretter ut summen av rekka med digitalt verktøy.

a $2+4+6+\ldots+100$
b $10+12+14+\ldots+100$
c $1+8+27+64+\ldots+1000$

Sti 1	Sti 2	Sti 3

Stifinner: side 335

2.3 ARITMETISKE REKKER

I 2.3 skal du lære å identifisere og summere aritmetiske rekker.

Se på rekkene

2 + 5 + 8 + 11 + … ①
50 + 45 + 40 + 35 + … ②

I ① er hvert ledd 3 større enn leddet foran.
Det n-te leddet er altså gitt ved $a_n = a_{n-1} + 3$.
Vi sier at *differansen* i rekka er 3.

I ② er hvert ledd 5 mindre enn leddet foran.
Det n-te leddet er her gitt ved $a_n = a_{n-1} - 5$.
Differansen i rekka er -5.

① og ② er eksempler på det vi kaller *aritmetiske* rekker. I slike rekker får vi det neste leddet ved å legge til et bestemt tall, *differansen*.

Hva tror du er grunnen til at vi kaller det faste tallet i aritmetiske rekker *differanse?*

Vi oppsummerer:

En rekke er aritmetisk dersom det fins et tall d slik at $a_n = a_{n-1} + d$ for alle $n > 1$. Tallet d kaller vi differansen i rekka.

Oppgave 2.15
Avgjør om rekka er aritmetisk. Finn i så fall differansen og skriv opp en rekursiv formel for det n-te leddet i rekka.

a $1+3+5+7$ **b** $10+12+15+19$
c $2+1,5+1+0,5$ **d** $5+5+5+5$

Oppgave 2.16
Skriv opp de fem første leddene i en aritmetisk rekke, der

a $a_1 = 10$ og $d = 4$ **b** $a_2 = 10$ og $d = 4$
c $a_1 = 10$ og $d = -4$ **d** $a_{10} = 8$ og $d = 1$

Det *n*-te leddet i en aritmetisk rekke

La oss se på en aritmetisk rekke

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

For hvert ledd vi går utover i rekka, må vi legge til differansen d. Vi kan derfor uttrykke leddene i rekka ved hjelp av det første leddet og differansen slik:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$
$$a_5 = a_4 + d = a_1 + 4d$$
$$\vdots$$

Vi ser at antall differanser er én mindre enn leddnummeret.
Det gir oss denne generelle regelen:

Det n-te leddet i en aritmetisk rekke er $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Eksempel 1 Formel for det n-te leddet

I en aritmetisk rekke er det første leddet 5, og differansen er −3.
Vi skal finne en formel for det n-te leddet, og så bruke denne til å finne ledd nr. 69.

Her har vi altså $a_1 = 5$ og $d = -3$.
Vi finner først en formel for det n-te leddet i rekka.

$$a_n = 5 + (n-1)\cdot(-3)$$

$$a_n = 5 - 3n + 3$$

$$a_n = 8 - 3n$$

Legg merke til at det n-te leddet er en lineær funksjon av leddnummeret.

Ledd nr. 69 i rekka er

$$a_{69} = 8 - 3\cdot 69 = -199$$

Oppgave 2.17

Finn en formel for det n-te leddet i den aritmetiske rekka.

a $a_1 = 8$ og $d = 3$ **b** $a_5 = 8$ og $d = -1$

c $1 + 3 + 5 + \ldots$ **d** $33 + 26 + 19 + \ldots$

Eksempel 2 To kjente ledd er nok

I en aritmetisk rekke kjenner vi to ledd: $a_{13} = 57$ og $a_{17} = 73$
Vi ønsker å skrive ut rekka og må da finne det første leddet og differansen i rekka.

Det er fire differanser mellom det trettende og det syttende leddet: $a_{17} = a_{13} + 4d$
Vi får $73 = 57 + 4d$, som gir $d = 4$.

Videre er det tolv differanser mellom det første og det trettende leddet: $a_{13} = a_1 + 12d$
Vi får $57 = a_1 + 12\cdot 4$, som gir $a_1 = 9$.

Rekka er altså

$$9 + 13 + 17 + 21 + \ldots$$

Vi kunne også ha brukt formelen for det n-te leddet i en aritmetisk rekke til å lage to likninger:

$$57 = a_1 + 12d$$

$$73 = a_1 + 16d$$

Kontroller selv at vi får den samme rekka ved å løse dette likningssettet!

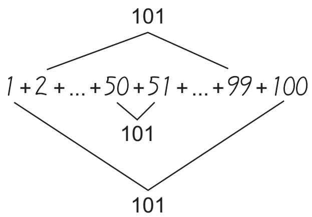
Oppgave 2.18

Finn en formel for a_n og skriv opp de fem første leddene i en aritmetisk rekke, der

a $a_5 = 23$ og $a_6 = 27$ **b** $a_{51} = 843$ og $a_{59} = 1003$

Sumformelen for aritmetiske rekker

Den tyske matematikeren Carl Friedrich Gauss (1777–1855) utmerket seg allerede som liten gutt. Det fortelles ofte om den gangen læreren trodde han hadde sysselsatt gutten for en stund. Oppdraget var å finne summen av de 100 første naturlige tallene. Men, noen straks seinere hadde niåringen løst oppgaven.



Gauss tenkte slik figuren i margen viser.

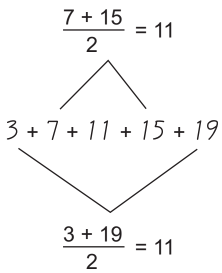
To og to av leddene gir en sum på 101. I alt er det 50 slike par. Summen av alle tallene er derfor $101 \cdot 50 = 5050$.

La oss analysere situasjonen nærmere.
De 100 første naturlige tallene danner en aritmetisk rekke, der $a_1 = 1$ og $a_{100} = 100$. To og to av leddene svarer til summen $a_1 + a_{100} = 101$, og i gjennomsnitt bidrar derfor hvert ledd i rekka med

$$\frac{a_1 + a_{100}}{2} = \frac{101}{2} = 50,5$$

til summen. Ettersom rekka består av 100 ledd, får vi

$$S_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = 50,5 \cdot 100 = 5050$$



Summen av rekka er altså gjennomsnittet av første og siste ledd, multiplisert med antall ledd vi skal summere.

Tankegangen ovenfor gjelder uavhengig av differansen i rekka. Det har heller ikke noe å si om antall ledd er et partall eller et oddetall. Hvis vi har et odde antall ledd, vil det midterste leddet i rekka vise hva hvert ledd i rekka i gjennomsnitt bidrar med til summen.

Generelt gjelder denne sumformelen:

> Summen av de n første leddene i en aritmetisk rekke er
> $$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Eksempel 3 Bruk av sumformelen

Vi skal finne summen av de 46 første leddene i rekka $3+7+11+15+\dots$.

Rekka er aritmetisk med $a_1=3$ og $d=4$. For å bruke sumformelen trenger vi ledd nr. 46.

$$a_{46}=a_1+45d=3+45\cdot 4=183$$

Summen av de 46 første leddene er

$$S_{46}=\frac{a_1+a_{46}}{2}\cdot 46=\frac{3+183}{2}\cdot 46=4278$$

Eksempel 4 Ukjent antall ledd

Vi skal finne summen av rekka $10+23+36+\dots+179$.

Rekka er aritmetisk med $a_1=10$ og $d=13$. For å bruke sumformelen må vi vite hvor mange ledd det er i rekka. Vi bruker formelen for det n-te leddet i en aritmetisk rekke til å finne n.

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+(n-1)d\\179&=10+(n-1)\cdot 13\\179&=10+13n-13\\13n&=182\\n&=14\end{aligned}$$

Summen av de 14 leddene er

$$S_{14}=\frac{a_1+a_{14}}{2}\cdot 14=\frac{10+179}{2}\cdot 14=1323$$

Oppgave 2.19

Finn summen av de ti første leddene i en aritmetisk rekke, der

a $a_1=40$ og $a_{10}=300$
b $a_1=40$ og $d=3$
c $a_1=40$ og $d=-3$
d $a_1=1$ og $a_2=4$
e $a_2=5$ og $a_6=33$
f $a_1=a_2=5$

Oppgave 2.20

Finn summen av rekka.

a $1+7+13+\dots+61$
b $19+16+13+\dots-20$

Vi kan bruke aritmetiske rekker til å modellere lineær vekst. Differansen i rekka vil da svare til den konstante veksten per enhet.

Eksempel 5 Jamt og trutt

En bedrift hadde en omsetning på 15 millioner kroner i 2007. Bedriften regner med å øke omsetningen med en halv million kroner hvert år framover. Vi vil finne den samlede omsetningen i perioden 2007–2015 om prognosen slår til.

Perioden 2007–2015 omfatter 9 år, fra og med 2007 til og med 2015. De årlige omsetningene danner en aritmetisk rekke med 9 ledd, der $a_1 = 15$ og $d = 0,5$. Før vi bruker sumformelen, må vi regne ut omsetningen i 2015.

$$a_9 = a_1 + 8d = 15 + 8 \cdot 0,5 = 19$$

Summen av rekka er

$$S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{15 + 19}{2} \cdot 9 = 153$$

Den samlede omsetningen i perioden 2007–2015 vil etter dette bli 153 millioner kroner.

Sti 1	Sti 2	Sti 3

Stifinner: side 337

Oppgave 2.21

I flere år røykte Mona omtrent 500 sigaretter i måneden. Nyttårsaften 2006 bestemte hun seg for å slutte å røyke i løpet av 2007. Mona reduserte forbruket slik at hun hver måned fra og med januar 2007 røykte 60 sigaretter færre enn måneden før.

a Forklar at det månedlige forbruket danner en aritmetisk rekke.

b I hvilken måned ble Mona røykfri?

c Hvor mange sigaretter røykte Mona i 2007?

Monas ukeforbruk i 2006?

Bevis for sumformelen for aritmetiske rekker

Summen av de n første leddene i en aritmetisk rekke er

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Alle leddene fra a_2 til a_n kan vi uttrykke ved a_1 og d.
Summen av de n leddene blir da

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \ldots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d)$$

Men vi kan også starte med a_n og uttrykke de andre leddene ved a_n og d. Da får vi at summen av rekka kan skrives som

$$S_n = a_n + (a_n - d) + \ldots + (a_n - (n-2)d) + (a_n - (n-1)d)$$

Legger vi sammen de to uttrykkene for S_n, faller alle ledd med d bort. Da står vi igjen med

$$2 \cdot S_n = n \cdot a_1 + n \cdot a_n$$

Vi ordner og får sumformelen

$$S_n = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot n$$

2.4 GEOMETRISKE REKKER

I 2.4 skal du lære å identifisere og summere geometriske rekker. Du skal også lære å bruke geometriske rekker til å løse praktiske problemer.

Se på rekkene

$$4 + 12 + 36 + 108 + \ldots$$

$$40 + 20 + 10 + 5 + \ldots$$

Felles for dem er at vi får fram det neste leddet ved å multiplisere med et fast tall. Det faste tallet er 3 i den første rekka og $\frac{1}{2}$ i den andre. Vi sier at slike rekker er *geometriske*, og det faste tallet kaller vi *kvotienten* i rekka. Kvotienten i en geometrisk rekke finner vi som forholdet mellom et ledd og leddet foran:

$$\frac{12}{4} = \frac{36}{12} = \frac{108}{36} = \ldots = 3$$

$$\frac{20}{40} = \frac{10}{20} = \frac{5}{10} = \ldots = \frac{1}{2}$$

Kvotienten har symbolet k.

Hva tror du er grunnen til at vi kaller det faste tallet i en geometrisk rekke *kvotient?*

En rekke er geometrisk dersom det fins et tall k slik at $a_n = a_{n-1} \cdot k$ for alle $n > 1$. Kvotienten k er det konstante forholdet mellom et ledd og leddet foran: $k = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \ldots$

Oppgave 2.22

Undersøk om rekka er geometrisk, og finn i så fall kvotienten.

a $1+2+4+8+16$

b $2+4+6+8+10$

c $2+6+18+36$

d $81+54+36+24$

e $3-6+12-24$

f $500+1100+2420+5324$

Oppgave 2.23

Skriv ut de fem første leddene i en geometrisk rekke, der

a $a_1 = 1$ og $k = 4$

b $a_1 = 10\,000$ og $k = -0{,}2$

c $a_2 = 1$ og $a_3 = 5$

Det *n*-te leddet i en geometrisk rekke

Vi skal nå finne en formel for det n-te leddet i en geometrisk rekke

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

For hvert ledd vi går utover i rekka, må vi multiplisere med kvotienten k. Dette kan vi bruke til å uttrykke leddene i rekka ved hjelp av det første leddet og kvotienten:

$$a_2 = a_1 \cdot k$$

$$a_3 = a_2 \cdot k = a_1 \cdot k^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot k = a_1 \cdot k^3$$

$$a_5 = a_4 \cdot k = a_1 \cdot k^4$$

$$\vdots$$

Vi ser at eksponenten kvotienten opphøyes i, er én mindre enn leddnummeret. Det gir oss en generell regel:

Det n-te leddet i en geometrisk rekke er $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$.

Eksempel 1 Formel for det *n*-te leddet

Vi vil finne det tjuende leddet i rekka $3+6+12+24+\ldots$.

Forholdet mellom et ledd og leddet foran er konstant lik $\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \ldots = 2$.

Rekka er derfor geometrisk med $k = 2$ og $a_1 = 3$.

Det n-te leddet i rekka er da

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$$

Det tjuende leddet er

$$a_{20} = 3 \cdot 2^{20-1} = 3 \cdot 2^{19} = 1\,572\,864$$

Oppgave 2.24
Finn en formel for det n-te leddet i den geometriske rekka.

a $a_1 = 6$ og $k = 5$ **b** $a_4 = -80$ og $k = -2$

c $625 + 125 + 25 + 5 + \ldots$ **d** $\frac{3}{4} + 1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{9} + \ldots$

Eksempel 2 To kjente ledd er ikke alltid nok

I en uendelig geometrisk rekke kjenner vi to ledd: $a_6 = 405$ og $a_{10} = 32\,805$
Vi ønsker å skrive ut rekka, og må da finne kvotienten og det første leddet.

For å komme fra det sjette til det tiende leddet må vi multiplisere fire ganger med kvotienten:

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_6 \cdot k^4 \\ 32\,805 &= 405 \cdot k^4 \\ k^4 &= 81 \\ k &= \sqrt[4]{81} \\ k &= \pm 3 \end{aligned}$$

Kvotienten er 3 eller -3.

Siden $a_6 = a_1 \cdot k^5$, er $a_1 = \frac{a_6}{k^5}$.

$$k = 3 \quad \text{gir} \quad a_1 = \frac{405}{3^5} = \frac{5}{3}$$

$$k = -3 \quad \text{gir} \quad a_1 = \frac{405}{(-3)^5} = -\frac{5}{3}$$

Rekka er ikke entydig bestemt av a_6 og a_{10}.
Det er to rekker som tilfredsstiller opplysningene vi startet med:

$$\frac{5}{3} + 5 + 15 + 45 + \ldots \quad \text{og} \quad -\frac{5}{3} + 5 - 15 + 45 - \ldots$$

Kontroller at $a_6 = 405$ og $a_{10} = 32\,805$ i begge rekkene.

Oppgave 2.25
Finn en formel for det n-te leddet i en geometrisk rekke, der

a $a_4 = 270$ og $a_5 = 405$ **b** $a_2 = 3$ og $a_5 = 81$

Oppgave 2.26
I en geometrisk rekke er det andre leddet 5.
Hvis det femte leddet er 40, er rekka entydig bestemt.
Hvis det åttende leddet er 320, er rekka ikke entydig bestemt.
Hva er forklaringen på det?

Sumformelen for geometriske rekker

For alle rekker har vi at

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

I geometriske rekker med kvotient k får vi

$$S_n = a_1 + a_1k + a_1k^2 + \ldots + a_1k^{n-2} + a_1k^{n-1} \qquad (1)$$

Nå tyr vi til et triks.
Vi multipliserer (1) med kvotienten k og får

$$S_nk = a_1k + a_1k^2 + a_1k^3 + \ldots + a_1k^{n-1} + a_1k^n \qquad (2)$$

Sammenlikner vi høyresidene i (1) og (2), ser vi at de er svært like. Forskjellen ligger i det første leddet i (1) og det siste leddet i (2). Trekker vi (1) fra (2), faller alle de like leddene bort, og vi står igjen med

$$S_nk - S_n = a_1k^n - a_1$$

Vi faktoriserer og får

$$S_n(k-1) = a_1(k^n - 1)$$

Hvis $k \neq 1$, får vi nå fram sumformelen ved å dividere med $k-1$:

> Summen av de n første leddene i en geometrisk rekke er
> $$S_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}.$$

I en geometrisk rekke der $k = 1$, er $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$.
Da er summen av de n første leddene rett og slett $S_n = n \cdot a_1$.

Eksempel 3 Bruk av sumformelen

Vi skal finne summen av de ti første leddene i den geometriske rekka

$$729 + 810 + 900 + 1000 + \ldots$$

Det første leddet er $a_1 = 729$, og kvotienten er $k = \frac{810}{729} = \frac{10}{9}$.

Summen av de ti første leddene er da

$$S_{10} = 729 \cdot \frac{\left(\frac{10}{9}\right)^{10} - 1}{\frac{10}{9} - 1} = 12\,255{,}8$$

Eksempel 4 Hvor mange ledd trengs?

Vi har rekka $1000+900+810+729+\dots$.
Hvor mange ledd må vi ta med for at summen skal bli over 9000?

Rekka er geometrisk med $a_1 = 1000$ og $k = \frac{900}{1000} = \frac{810}{900} = \frac{729}{810} = \dots = 0{,}9$.

For å finne ut hvor mange ledd som trengs for at summen skal bli over 9000, må vi løse en ulikhet.

$$S_n > 9000$$

$$1000 \cdot \frac{0{,}9^n - 1}{0{,}9 - 1} > 9000$$

$$\frac{0{,}9^n - 1}{-0{,}1} > 9$$

multipliserer med $-0{,}1$ og snur ulikhetstegnet

$$0{,}9^n - 1 < -0{,}9$$

$$0{,}9^n < 0{,}1$$

$$\ln 0{,}9^n < \ln 0{,}1$$

$$n \ln 0{,}9 < \ln 0{,}1$$

dividerer med $\ln 0{,}9$ og snur ulikhetstegnet

$$n > \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}9}$$

$$n > 21{,}85$$

Vi må ta med minst 22 ledd for at summen skal bli over 9000.

Oppgave 2.27

Finn summen av de ti første leddene i en geometrisk rekke, der

a $a_1 = 4$ og $k = 5$
b $a_1 = 1000$ og $k = 0{,}25$
c $a_1 = 1$ og $k = -3{,}9$
d $a_1 = 1$ og $a_2 = 4$
e $a_2 = 125$ og $a_5 = 27$
f $a_1 = a_2 = 5$

Oppgave 2.28

Finn summen av rekka.

a $1+3+9+\dots+729$
b $729+243+81+\dots+1$
c $25+25\cdot 1{,}23+25\cdot 1{,}23^2+\dots+25\cdot 1{,}23^{20}$
d $64+32+16+\dots+\frac{1}{64}$

Oppgave 2.29

Hvor mange ledd må vi ta med for at summen skal bli over 1000?

a $1+3+9+27+\dots$
b $300+240+192+\dots$

Praktisk bruk av geometriske rekker

I Vg1 lærte du at når noe øker eller minker med en fast prosent per tidsenhet, har vi det vi kaller *prosentvis* eller *eksponentiell* vekst. Da er

$$\text{ny verdi} = \text{gammel verdi} \cdot \text{vekstfaktor}$$

- En økning på p % svarer til en vekstfaktor på $1 + \frac{p}{100}$.
- En nedgang på p % svarer til en vekstfaktor på $1 - \frac{p}{100}$.

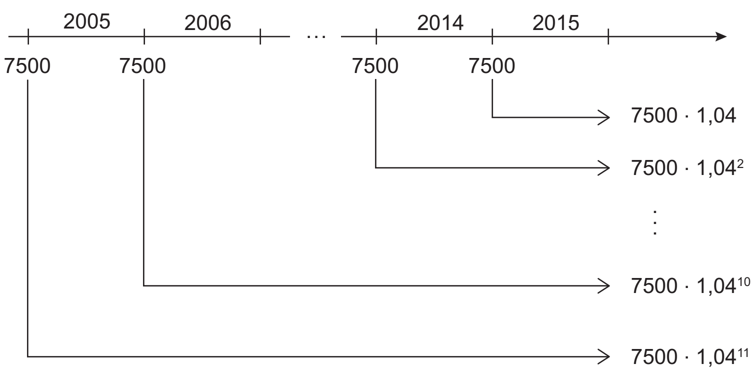
Ofte får vi bruk for geometriske rekker i forbindelse med størrelser som vokser eksponentielt.

Eksempel 5 Sparing

Gunnar har en spareavtale med banken sin. Fra og med 2005 har han den 1. januar hvert år overført 7500 kr til en spesiell sparekonto der renten er 4 % per år, uavhengig av markedsrenten. Vi skal beregne hva saldoen på sparekontoen kommer til å være når spareavtalen utløper 31.12.2015.

Gunnar kommer til å gjøre 11 innskudd på sparekontoen. Hvert innskudd er på 7500 kr, det første i januar 2005 og det siste i januar 2015.
For å ta hensyn til rentene må vi se hva hvert av innskuddene har forrentet seg til ved *utgangen* av 2015.

Det siste innskuddet blir satt inn 1. januar 2015, og vokser i løpet av året til $7500 \cdot 1{,}04 = 7800$.
Det nest siste innskuddet blir satt inn 1. januar 2014, og vokser i løpet av to år til $7500 \cdot 1{,}04^2 = 8112$.
Og slik kan vi fortsette fram til det første innskuddet, som ble satt inn 1. januar 2005.
I løpet av 11 år vokser det første innskuddet til $7500 \cdot 1{,}04^{11} = 11\,545{,}91$.



Sluttsaldoen blir derfor $7500 \cdot 1{,}04 + 7500 \cdot 1{,}04^2 + \ldots + 7500 \cdot 1{,}04^{11}$.

Dette er en geometrisk rekke med elleve ledd, der $a_1 = 7500 \cdot 1{,}04$ og $k = 1{,}04$. Summen er

$$S_{11} = 7500 \cdot 1{,}04 \cdot \frac{1{,}04^{11} - 1}{1{,}04 - 1} = 105\,194$$

Når spareavtalen utløper, har Gunnar 105 194 kr på kontoen.

Oppgave 2.30

Odd satte inn 25 000 kr på en sparekonto 1. januar 2008 og har tenkt å gjøre det hvert år framover. Gå ut fra at renten er 5 % per år.

a Hvor mye har Odd på sparekontoen sin like etter innskuddet i januar 2015?

b Hvilket år passerer Odd én million kroner på sparekontoen?

c Hvor stort måtte det årlige innskuddet ha vært om Odd skulle ha passert millionen like etter innskuddet i januar 2020?

Eksempel 6 CO_2-utslipp

En bedrift reduserte fra og med 1990 utslippet av karbondioksid (CO_2) med 2 % i forhold til året før. Det samlede utslippet i perioden 1989–2007 var omtrent 1000 tonn.
Hvor stort var CO_2-utslippet fra bedriften i 1989 og i 2007?

Fra og med 1989 til og med 2007 er det 19 år.

I 1989 slapp bedriften ut en ukjent mengde CO_2, som vi kan sette til x tonn.
I 1990 var utslippet 2 % mindre, det vil si $(1-\frac{2}{100})\cdot x = 0{,}98x$.
I 1991 var utslippet 2 % mindre enn i 1990, altså $0{,}98\cdot(0{,}98x) = 0{,}98^2 x$.
Og så videre fram til og med 2007. Da var utslippet $0{,}98^{18}x$.

Vi ser at de årlige utslippene danner en geometrisk rekke med nitten ledd, der $a_1 = x$ og $k = 0{,}98$. Summen av rekka er

$$S_{19} = x + 0{,}98x + 0{,}98^2 x + \ldots + 0{,}98^{18} x$$

Nå setter vi $S_{19} = 1000$ og løser likningen med hensyn på x.

$$\begin{aligned} S_{19} &= 1000 \\ x\cdot\frac{0{,}98^{19}-1}{0{,}98-1} &= 1000 \\ x\cdot 15{,}94 &= 1000 \\ x &= 62{,}74 \end{aligned}$$

I 1989 var utslippet omtrent 63 tonn CO_2.

Det nittende leddet i den geometriske rekka er

$$a_{19} = 0{,}98^{18}x = 0{,}98^{18}\cdot 62{,}74 = 43{,}61$$

Utslippet i 2007 var omtrent 44 tonn CO_2.

Oppgave 2.31
En virksomhet hadde en omsetning på 15 millioner kroner i 2007. Ledelsen regner med å øke omsetningen med 12 % hvert år framover.

a Hvor stor vil omsetningen etter dette være i 2017?

b Sett opp en rekke som gir den samlede omsetningen for virksomheten fra og med 2007 til og med det n-te året etter 2007.

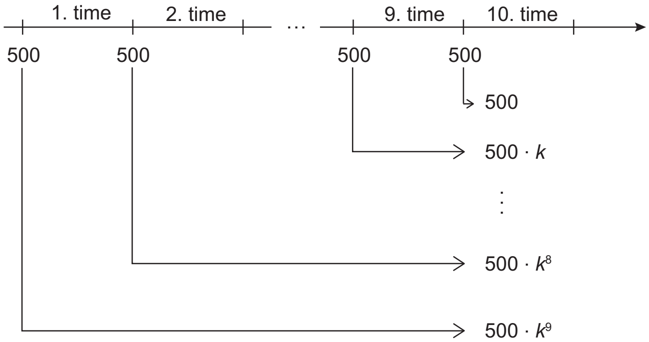
c Finn den samlede omsetningen i perioden 2007–2017 om prognosen slår til.

Eksempel 7 Paracetamol

Reidun er legestudent. En gang hun hadde influensa, tok hun en hodepinetablett hver time en hel dag. Hver tablett inneholdt 500 mg paracetamol. Like etter den tiende hodepinetabletten tok hun en blodprøve av seg selv. Analysen av blodprøven viste at hun hadde 2000 mg paracetamol i kroppen da prøven ble tatt. Hvor mange prosent av paracetamolmengden har kroppen brutt ned per time ut fra disse opplysningene?

Vi lar k være vekstfaktoren som svarer til hvor mye paracetamol kroppen bryter ned per time.

Da Reidun tok blodprøven, var ikke nedbrytningen av den tiende tabletten i gang. Den niende tabletten hun tok, var derimot brutt ned til $500 \cdot k$.
Den åttende tabletten var brutt ned til $500 \cdot k^2$.
Og så videre, fram til den første tabletten, som var brutt ned til $500 \cdot k^9$.



Den samlede paracetamolmengden i kroppen like etter den tiende tabletten danner en geometrisk rekke med kvotient k:

$$500 + 500k + 500k^2 + \ldots + 500k^9$$

Vi vet at summen av rekka er 2000. Det gir

$$500 \cdot \frac{k^{10} - 1}{k - 1} = 2000$$

Denne likningen løser vi med digitalt verktøy.

$$\text{solve}\left(\frac{500 \cdot (k^{10} - 1)}{k - 1} = 2000, k\right) \qquad k = .7678$$

At vekstfaktoren k er tilnærmet lik 0,77, betyr at kroppen har brutt ned 23 % av paracetamolmengden hver time.

Oppgave 2.32

En sau blir sluppet på beite på et område der gresset inneholder den radioaktive cesiumisotopen Cs-137. Sauen får i seg 0,20 ng Cs-137 hver dag (ng = nanogram, dvs. 10^{-9} g). På grunn av de biologiske prosessene vil sauen hele tiden kvitte seg med noe av det radioaktive stoffet den har fått i seg. For enkelhets skyld går vi her ut fra at sauen hver natt skiller ut 2,3 % av det den hadde i kroppen før den kom til ro kvelden før.

a Forklar at sauen etter to dager på beitet har $(0{,}20 + 0{,}20 \cdot 0{,}977)$ ng Cs-137 i kroppen.

b Finn den oppsamlede mengden av Cs-137 i sauen etter 20 dager på beitet.

c Hvor mange dager må sauen være på beitet for at den oppsamlede mengden av Cs-137 i sauen skal bli 5 ng?

d En annen sau som ble sluppet på det samme beiteområdet, viser seg å ha 3,3 ng Cs-137 i kroppen etter 20 dager på beitet. Hvor mange prosent skiller denne sauen ut hver natt hvis også den får i seg 0,20 ng Cs-137 hver dag?

Før vi tar neste eksempel, skal vi se på begrepet *nåverdi*.

Tenk deg at du skal betale en sum på 10 000 kr om 8 måneder. Med en tenkt, fast rente (*kalkulasjonsrente*) på 0,6 % per måned, kan du i stedet betale et beløp x nå som oppfyller likningen

$$x \cdot 1{,}006^8 = 10\,000$$

Det gir $x = \dfrac{10\,000}{1{,}006^8} = 9533$.

Vi sier at 9533 kr er nåverdien av de 10 000 kronene som du skal betale om 8 måneder.

Nåverdien av et beløp K som skal betales om n tidsperioder, er

$$\frac{K}{\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n}$$

der renten er p % per tidsperiode.
Tidsperioden er som regel måneder eller år.

Nåverdier får du blant annet bruk for når du skal vurdere å kjøpe på avbetaling.
Når du kjøper noe på avbetaling, betaler du et fast beløp hver måned over en periode i stedet for å betale kontant.
Summen av nåverdiene av avbetalingsbeløpene kan sammenliknes med kontantbeløpet.

Eksempel 8 Avbetaling

Håvard vil kjøpe seg en bil på avbetaling. Han kan betale 250 000 kr kontant. Resten tenker han å ta på avbetaling. Han kan klare å betale 5000 kr hver måned i 36 måneder, første gang én måned etter bilkjøpet.
Hvor dyr bil kan Håvard kjøpe dersom renten er 1,1 % per måned?

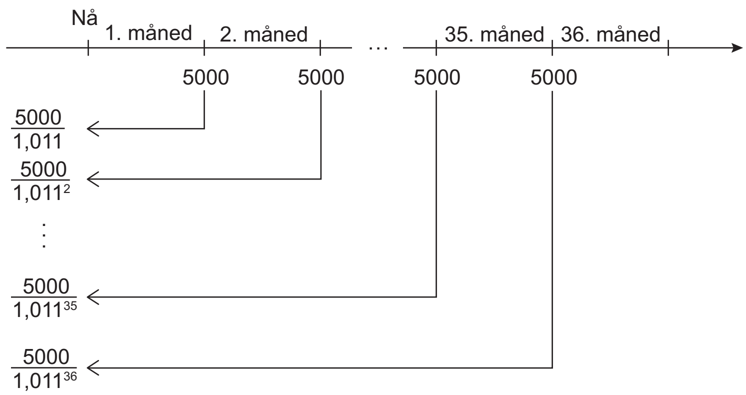
Vi finner nåverdien av alle avbetalingsbeløpene.

Første beløp: $\dfrac{5000}{1{,}011}$

Andre beløp: $\dfrac{5000}{1{,}011^2}$

Tredje beløp: $\dfrac{5000}{1{,}011^3}$

Og så videre, til 36. og siste beløp: $\dfrac{5000}{1{,}011^{36}}$



Til sammen blir dette

$$\frac{5000}{1{,}011}+\frac{5000}{1{,}011^2}+\ldots+\frac{5000}{1{,}011^{36}}$$

Summen av nåverdiene utgjør altså en geometrisk rekke med 36 ledd, der $a_1=\dfrac{5000}{1{,}011}$ og $k=\dfrac{1}{1{,}011}$.

Sumformelen gir

$$S_{36}=\frac{5000}{1{,}011}\cdot\frac{\left(\dfrac{1}{1{,}011}\right)^{36}-1}{\dfrac{1}{1{,}011}-1}=147\,971$$

Sammen med kontantbeløpet blir dette 147 971 kr + 250 000 kr = 397 971 kr. Avbetalingsordningen innebærer altså at Håvard kan kjøpe en bil til en verdi av omtrent 400 000 kr.

Oppgave 2.33

Ta for deg bilkjøpet i eksempel 8.

a Hvor dyr bil kan Håvard kjøpe hvis han greier å øke avbetalingsbeløpet til 6000 kr (i hver av de 36 månedene)?

b Hvor dyr bil kan Håvard kjøpe hvis han kan forlenge avbetalingsperioden til 5 år (og betaler 5000 kr hver måned)?

Oppgave 2.34

John skal kjøpe seg ny PC. Han kan betale 15 000 kr kontant eller 475 kr per måned i 3 år, første gang om én måned. Sett renten til 0,5 % per måned.

a Bør John velge kontant betaling eller avbetaling?

John fikk etter lang diskusjon med selgeren en avtale om at første avbetalingsbeløp skal betales om ett år.

b Forandrer dette konklusjonen du kom fram til i oppgave a?

Sti 1	Sti 2	Sti 3

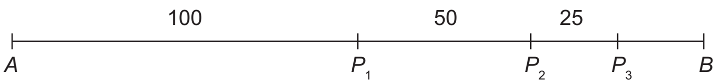
Stifinner: side 339

Dra på bilsalg og regn med nåverdier

I 2.5 skal du lære å summere konvergente, uendelige geometriske rekker med konstante eller variable kvotienter.

2.5 UENDELIGE GEOMETRISKE REKKER

Vi skal nå se nærmere på uendelige geometriske rekker og starter med et linjestykke AB som er 200 lengdeenheter.



Midtpunktet på AB kaller vi P_1.
Midtpunktet på P_1B kaller vi P_2.
Midtpunktet på P_2B kaller vi P_3. Og så videre.
På denne måten får vi delt opp AB i uendelig mange linjestykker AP_1, P_1P_2, P_2P_3, ...
Lengden av hvert linjestykke er halvparten av det foregående.

Hvis vi fortsetter å dele, vil delepunktene komme stadig nærmere B. Summen av linjestykkene AP_1, P_1P_2, P_2P_3, ... vil nærme seg lengden av AB som grenseverdi. Summen av linjestykkene kan nemlig ikke bli lik lengden av AB uansett hvor mange ledd vi tar med.

Det betyr at summen av de n første leddene i den uendelige geometriske rekka

$$100 + 50 + 25 + \ldots$$

nærmer seg 200 når antall ledd går mot uendelig.

konvergere = nærme seg

Vi sier at rekka er *konvergent*, og at den *konvergerer* mot 200. Tallet som den uendelige rekka konvergerer mot, kaller vi *summen* av rekka.

Vi skriver $S = 200$.

Legg merke til at S ikke er en vanlig sum. S er en grenseverdi, det vil si det tallet som S_n nærmer seg når n vokser.

Summen av en konvergent rekke er $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

divergere = fjerne seg

Hvis en uendelig rekke ikke er konvergent, sier vi at den er *divergent* eller at den *divergerer*.
En divergent rekke har ikke noen sum.

Som eksempel kan vi ta rekka

$$1+2+4+8+\ldots$$

Her er $S_{10} = 1023$, $S_{20} = 1\,048\,575$ og $S_{50} = 1{,}1\cdot 10^{15}$.
Summen S_n vokser over alle grenser, og $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ eksisterer derfor ikke.

Oppgave 2.35
I en uendelig geometrisk rekke er det første leddet 50.
Finn S_{10}, S_{50} og S_{100} når kvotienten er
a $1{,}25$ **b** $0{,}75$ **c** $-0{,}75$ **d** $-1{,}25$
Vurder i hvert tilfelle om rekka konvergerer eller divergerer.

Oppgave 2.36
a Regn ut potensene k^{10} og k^{100} når
1 $k = 0{,}85$ 2 $k = 0{,}21$ 3 $k = -0{,}7$ 4 $k = 1{,}1$
b Hva kan du si om potensen k^n når n er veldig stor og k er et tall mellom -1 og 1?

Vi skal nå undersøke hva som må til for at en uendelig geometrisk rekke skal konvergere.
Hvis det første leddet i rekka er a_1 og kvotienten er k, vet du at summen av de n første leddene er

$$S_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

Her er k^n det eneste tallet som er avhengig av n.
Når $-1 < k < 1$, vil k^n nærme seg null når n vokser.
For disse k-verdiene får vi derfor

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}\right) = a_1 \cdot \frac{0-1}{k-1} = \frac{-a_1}{k-1} = \frac{a_1}{1-k}$$

Vi oppsummerer:

En uendelig geometrisk rekke med kvotient k konvergerer når $-1 < k < 1$.

Summen av den konvergente rekka er $S = \frac{a_1}{1-k}$, der a_1 er det første leddet i rekka.

Å kreve at $-1 < k < 1$, er det samme som å si at absoluttverdien av k må være mindre enn 1, det vil si $|k| < 1$.

Når $|k| \geq 1$, går ikke S_n mot noen grense når n vokser.
Rekka er da divergent.

Eksempel 1 Konvergerer rekka?

Vi skal avgjøre om disse uendelige geometriske rekkene konvergerer, og eventuelt finne summen.

$$1000 + 1200 + 1440 + 1728 + \ldots \quad (1)$$

$$1000 + 800 + 640 + 512 + \ldots \quad (2)$$

I (1) er $k = 1{,}2$. Da er rekka divergent, og den har ingen sum.

I (2) er $k = 0{,}8$. Da er rekka konvergent, og summen er $S = \frac{1000}{1-0{,}8} = 5000$.

Oppgave 2.37

Avgjør om rekka konvergerer, og finn eventuelt summen.

- **a** $256 + 128 + 64 + 32 + \ldots$
- **b** $1000 + 1400 + 1960 + 2744 + \ldots$
- **c** $10 - 10 + 10 - 10 + \ldots$
- **d** $27 - 18 + 12 - 8 + \ldots$
- **e** $1 + 1{,}5 + 2 + 2{,}5 + \ldots$

Neste eksempel viser praktisk bruk av uendelige geometriske rekker.

Eksempel 2 Tvilsom dosering

Ola har vond rygg og har begynt å ta en smertestillende tablett hver morgen. Hver tablett inneholder 125 mg virkestoff. Kroppen bryter ned 60 % av virkestoffet hvert døgn og tåler opptil 200 mg uten at det resulterer i skadevirkninger.
Vi skal finne ut om det er trygt for Ola å ta en tablett hver morgen over en lang periode.

Vi tenker oss at Ola tar en tablett hver morgen.
Like etter at han har tatt en tablett, har han 125 mg virkestoff fra denne tabletten i kroppen.
Fra tabletten dagen før har han $125 \text{ mg} \cdot (1-0{,}6) = 125 \cdot 0{,}4$ mg virkestoff i kroppen.
Fra tabletten dagen før den igjen har han $125 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4$ mg virkestoff i kroppen.
Og så videre.

Like etter å ha tatt en tablett vil mengden av virkestoffet (i mg) i kroppen i det lange løp være tilnærmet gitt ved den uendelige geometriske rekka

$$125 + 125 \cdot 0,4 + 125 \cdot 0,4^2 + \dots$$

Rekka konvergerer, for $-1 < k < 1$. Summen er

$$S = \frac{125}{1 - 0,4} = 208,33$$

Ola vil etter dette få en konstant mengde på omtrent 208 mg av virkestoffet i kroppen. Dette kan skade kroppen, så Ola bør fortest mulig få løst ryggproblemene sine på en annen måte!

Oppgave 2.38

En tablett av et legemiddel inneholder 2,5 mg av et stoff som vil være giftig for pasienter hvis den totale mengden i kroppen overstiger 10 mg.
En pasient tar en slik tablett hver dag over lang tid.
Kroppen hennes bryter ned 30 % av giftstoffet per døgn.
Er doseringen forsvarlig for denne pasienten?

Oppgave 2.39

Vann renner ut fra et akvarium. Antall liter vann som renner ut hvert sekund, danner en tilnærmet geometrisk rekke, der $a_1 = 3,8$ og $k = 0,95$.
Anslå hvor mye vann det opprinnelig var i akvariet.

$|k| < 1$?

Variable kvotienter

Kvotienten i en uendelig geometrisk rekke er ikke alltid en konstant. Vi gir to eksempler:

$a_1 = 1$ og $k = 2x$ gir rekka $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots$
$a_1 = 5$ og $k = \mathrm{e}^x$ gir rekka $5 + 5\mathrm{e}^x + 5\mathrm{e}^{2x} + 5\mathrm{e}^{3x} + \ldots$

Når kvotienten er en funksjon av x, får vi generelt

$$a_1 + a_1 \cdot k(x) + a_1 \cdot \big(k(x)\big)^2 + a_1 \cdot \big(k(x)\big)^3 + \ldots$$

Kvotienten er en *variabel*.

Hvis $a_1 \neq 0$, er rekka konvergent når $-1 < k(x) < 1$.
Det er det samme som at rekka konvergerer når $|k(x)| < 1$, eller når $\big(k(x)\big)^2 < 1$.

Eksempel 3 Konvergensområde 1

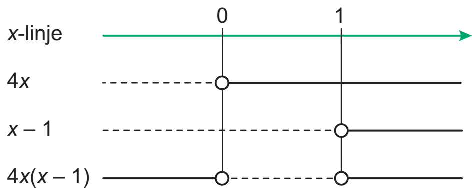
Vi skal avgjøre for hvilke verdier av x den uendelige geometriske rekka

$$6 + 6 \cdot (2x - 1) + 6 \cdot (2x - 1)^2 + 6 \cdot (2x - 1)^3 + \ldots$$

konvergerer. Deretter skal vi undersøke om summen av rekka kan bli 1.

Kvotienten er her $k(x) = 2x - 1$. Vi undersøker når $\big(k(x)\big)^2 < 1$:

$$(2x-1)^2 < 1^2$$
$$4x^2 - 4x + 1 < 1$$
$$4x^2 - 4x < 0$$
faktoriserer
$$4x(x-1) < 0$$



Av fortegnslinja for $4x(x-1)$ får vi at rekka konvergerer for $x \in \langle 0, 1 \rangle$.
Vi sier at rekka har *konvergensområdet* $\langle 0, 1 \rangle$.

Summen av rekka er da

$$S = \frac{6}{1-(2x-1)} = \frac{6}{2-2x} = \frac{3}{1-x} \quad \text{når } x \in \langle 0, 1 \rangle$$

Vi setter $S = 1$ og får

$$\frac{3}{1-x} = 1$$
$$3 = 1 - x$$
$$x = -2$$

Summen av rekka kan ikke bli 1, for -2 tilhører ikke konvergensområdet for rekka.

Eksempel 4 Konvergensområde 2

Vi skal finne konvergensområdet for den uendelige geometriske rekka

$$1+\frac{x}{1-x}+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2+\ldots\,,\qquad x\neq 1$$

Her er $k(x)=\dfrac{x}{1-x}$. Vi undersøker når $\left(k(x)\right)^2<1$:

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^2<1$$

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^2-1<0$$

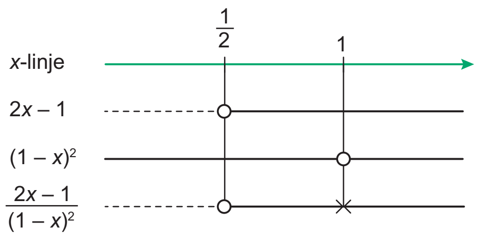
tredje kvadratsetning: $k^2-1=(k+1)\cdot(k-1)$

$$\left(\frac{x}{1-x}+1\right)\cdot\left(\frac{x}{1-x}-1\right)<0$$

$$\frac{x+1-x}{1-x}\cdot\frac{x-(1-x)}{1-x}<0$$

$$\frac{1}{1-x}\cdot\frac{2x-1}{1-x}<0$$

$$\frac{2x-1}{(1-x)^2}<0$$



Fortegnslinja for $\dfrac{2x-1}{(1-x)^2}$ viser at konvergensområdet er $\left\langle \leftarrow\,,\,\dfrac{1}{2}\right\rangle$.

Oppgave 2.40

Finn x slik at rekka blir konvergent. Finn deretter summen.

a $1+x+x^2+x^3+\ldots$

b $1+2x+4x^2+8x^3+\ldots$

c $1+e^x+e^{2x}+e^{3x}+\ldots$

d $1+\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{(1-x)^2}+\ldots\,,\qquad x\neq 1$

e $1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{9}{x^2}+\ldots\,,\qquad x\neq 0$

Oppgave 2.41

Ta for deg rekka $1+(3x-5)+(3x-5)^2+(3x-5)^2+\ldots$.

a Hva er kvotienten i rekka?

b For hvilke verdier av x er rekka konvergent?

c Finn et uttrykk for summen av rekka når den konvergerer.

d For hvilken verdi av x er summen av rekka $\frac{2}{3}$?

e Kan summen av rekka bli -2?

Sti 1 | Sti 2 | Sti 3

Stifinner: side 342

2.6 INDUKSJONSBEVIS

I 2.6 skal du lære å gjennomføre induksjonsbevis.

I oddetallsrekka

$$1+3+5+\ldots$$

finner vi summene

$$1=1^2$$

$$1+3=4=2^2$$

$$1+3+5=9=3^2$$

Det ser ut som om summen av de n første oddetallene er

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

Vi sjekker at formelen stemmer for $n=4$ og $n=5$:

$$1+3+5+7=16=4^2$$

$$1+3+5+7+9=25=5^2$$

Slik kan vi fortsette å vise at formelen stemmer for stadig nye n-verdier. Problemet er bare at det fins uendelig mange n-verdier som må sjekkes!

For å slippe å sjekke hver enkelt n-verdi kan vi i stedet vise at

1. *hvis* formelen stemmer for et vilkårlig naturlig tall, *så* stemmer den også for det neste
2. formelen stemmer for $n=1$

Kombinerer vi de to punktene ovenfor, kan vi slutte at formelen stemmer for $n=2$. Og når den stemmer for $n=2$, så kan vi slutte at den stemmer for $n=3$, og så videre.

Tankegangen ovenfor er grunnlaget for det vi kaller *induksjonsbevis*. Dette er en bevistype som brukes mye til å bevise utsagn formulert ved naturlige tall.

Vi tar med noen eksempler på utsagn vi kan bevise ved induksjon:

$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ for alle naturlige tall $n\geq 1$.

n^5-n er delelig med 5 for alle naturlige tall $n\geq 1$.

$2^n>2n$ for alle naturlige tall $n\geq 3$.

Bevisene finner du i eksempel 1, 2 og 4.

Å bevise ved induksjon at et utsagn er sant for alle naturlige tall n, foregår i to trinn:

① Vis at hvis utsagnet er sant for $n = t$, så er det også sant for $n = t + 1$.

② Vis at utsagnet er sant for $n = 1$, eventuelt det minste naturlige tallet utsagnet er definert for.

Legg merke til at vi i trinn ① ikke tar stilling til om utsagnet *er* sant for $n = t$. Vi viser bare at *hvis* det er sant for $n = t$, *så* må det også være sant for $n = t + 1$. Kombinerer vi dette med trinn ②, følger det at utsagnet er sant for alle naturlige tall n det er definert for.

La oss gjennom noen eksempler vise hvordan du kan gjennomføre et induksjonsbevis.

Eksempel 1 Summen av oddetall

Vi vil gjennomføre et induksjonsbevis for utsagnet

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ for alle naturlige tall $n \geq 1$

Vi skal med andre ord bevise at summen av de n første oddetallene er $S_n = n^2$.

① Vi går ut fra at utsagnet er sant for $n = t$, det vil si at $S_t = t^2$.

Nå må vi vise at dette impliserer at utsagnet er sant også for $n = t + 1$.

Vi må altså vise implikasjonen

$$S_t = t^2 \quad \Rightarrow \quad S_{t+1} = (t+1)^2 = t^2 + 2t + 1$$

Nå skriver vi opp de $t + 1$ første leddene i rekka og får

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= 1 + 3 + 5 + \ldots + (2t - 1) + \big(2 \cdot (t+1) - 1\big) \\ &= 1 + 3 + 5 + \ldots + (2t - 1) + \big(2t + 1\big) \end{aligned}$$

Summen av de t første leddene i rekka er S_t. Det gir

$$S_{t+1} = S_t + (2t + 1)$$

Vi bruker at $S_t = t^2$, og får

$$S_{t+1} = t^2 + 2t + 1$$

Det er akkurat det vi skulle vise.

② Så viser vi at formelen stemmer for $n = 1$.

$S_1 = 1^2 = 1$, som opplagt er sant, siden $a_1 = 1$.

Utsagnet er derfor sant for alle naturlige tall n.

Ser du en sammenheng mellom induksjonsbevis og fallende dominobrikker?

Eksempel 2 Delelig med 5?

Vi skal bevise at $n^5 - n$ er delelig med 5 for alle naturlige tall n.

① Vi går ut fra at utsagnet er sant for $n = t$. Da fins det et naturlig tall s slik at $t^5 - t = 5 \cdot s$.

Nå må vi vise at dette impliserer at også $(t+1)^5 - (t+1)$ er delelig med 5.

Vi regner ut og får

$(t+1)^5 - (t+1)$	regner ut potensen med Pascals talltrekant eller med digitalt verktøy
$= t^5 + 5t^4 + 10t^3 + 10t^2 + 5t + 1 - t - 1$	samler $t^5 - t$
$= t^5 - t + 5t^4 + 10t^3 + 10t^2 + 5t$	bruker at $t^5 - t = 5 \cdot s$
$= 5 \cdot s + 5 \cdot (t^4 + 2t^3 + 2t^2 + t)$	faktoriserer
$= 5 \cdot (s + t^4 + 2t^3 + 2t^2 + t)$	

Som vi håpet, er uttrykket delelig med 5.
Regningen ovenfor viser at hvis utsagnet er sant for $n = t$, så er det også sant for $n = t + 1$.

② Vi viser at utsagnet er sant for $n = 1$.
Setter vi inn, får vi $1^5 - 1 = 0$, som er delelig med 5.

Vi har da bevist at $n^5 - n$ er delelig med 5 for alle naturlige tall n.

Før neste eksempel gjør vi oppmerksom på skrivemåten for høyere deriverte av en funksjon.

Første-, andre- og tredjederiverte av en funksjon $f(x)$ skriver vi

$$f'(x), f''(x) \quad \text{og} \quad f'''(x)$$

Men fra og med den fjerdederiverte går vi over til å skrive et tall i parentes, slik:

$$f^{(4)}(x)\,,\ f^{(5)}(x)\,,\ f^{(6)}(x), \ldots$$

For eksempel er den sjettederiverte av funksjonen lik den deriverte av den femtederiverte:

$$f^{(6)}(x) = \left(f^{(5)}(x)\right)'$$

Eksempel 3 *n*-tederivert

Vi skal bevise at den n-tederiverte av $f(x) = xe^x$ er gitt ved formelen $f^{(n)}(x) = (n+x)e^x$.

① Vi går ut fra at formelen er sann for $n = t$, det vil si at $f^{(t)}(x) = (t+x)e^x$.

Vi må nå bevise at dette impliserer at $f^{(t+1)}(x) = (t+1+x)e^x$.

Ettersom den $(t+1)$-tederiverte av f er den deriverte av den t-tederiverte av f, får vi

$$\begin{aligned} f^{(t+1)}(x) &= \left(f^{(t)}(x)\right)' \\ &= \left((t+x)e^x\right)' \\ &= \left(t+x\right)' \cdot e^x + (t+x) \cdot \left(e^x\right)' \\ &= 1 \cdot e^x + (t+x) \cdot e^x \\ &= (t+1+x)e^x \end{aligned}$$

② Formelen er sann for $n = 1$ hvis $f'(x) = (1+x)e^x$.

Vi bruker produktregelen for derivasjon: $f'(x) = \left(xe^x\right)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x)e^x$

Formelen stemmer altså for $n = 1$.

Dermed har vi bevist at formelen gjelder for alle naturlige tall n.

Eksempel 4 En ulikhet

Vi skal bevise at $2^n > 2n$ for alle naturlige tall $n \geq 3$.

① Vi går ut fra at utsagnet er sant for $n = t$, det vil si at $2^t > 2t$.

Nå må vi vise at dette impliserer at også $2^{t+1} > 2(t+1)$.

$$2^t > 2t$$
$$\Downarrow \quad \text{multipliserer med 2}$$
$$2^t \cdot 2 > 2t \cdot 2$$
$$\Downarrow \quad 2t \cdot 2 = 2t + 2t$$
$$2^{t+1} > 2t + 2t$$
$$\Downarrow \quad 2 < 2t$$
$$2^{t+1} > 2t + 2$$
$$\Downarrow \quad \text{faktoriserer}$$
$$2^{t+1} > 2(t+1)$$

② Det minste naturlige tallet utsagnet er definert for, er $n = 3$.

Setter vi inn, får vi $2^3 > 2 \cdot 3$ eller $8 > 6$, som er sant.

Vi har da bevist at $2^n > 2n$ for alle naturlige tall $n \geq 3$.

NB! De to trinnene i induksjonsbeviset er like viktige.
Trinn ① er ofte mer krevende enn trinn ②, men utsagnet er ikke bevist før du har utført begge.
Hvis du vil, kan du gjerne utføre trinn ② før trinn ①.

Oppgave 2.42

Bruk induksjon til å bevise at for alle naturlige tall n, så er

a $n^2 - n$ delelig med 2

b $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$

c $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

d $3 + 7 + 11 + \ldots + (4n-1) = n(2n+1)$

e $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \ldots + \dfrac{n}{2^n} = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$

Sti 1	Sti 2	Sti 3

Stifinner: side 344

1 Oppgavesamling Vektorer

STIFINNEREN

	Sti 1	Sti 2	Sti 3
1.1 Vektorer i rommet	100, 102, 104, 107, 108, 109, 112	101, 102, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 117▲, 119▲	101, 103, 105, 106, 110, 114▲, 115▲, 116▲, 118▲, 119▲, 120▲
1.2 Parameterframstillinger	121, 122, 125, 126	123, 124, 125, 126, 128▲, 130	123, 124, 126, 127▲, 128▲, 129▲, 130, 131▲
1.3 Vektorprodukt	132, 133, 136▲, 141▲, 144▲	132, 133, 135, 138▲, 140▲, 141▲, 145▲, 146▲	132, 133, 134, 137▲, 139▲, 140▲, 141▲ 142▲, 143▲, 145▲, 147▲▲
1.4 Plan	148, 149, 150, 151, 157	150, 151, 154, 155, 156, 158, 159▲	150, 153, 155, 158, 159▲, 160▲, 161▲, 162▲
1.5 Mer om plan og linjer	163, 164, 166	164, 165, 166, 167, 168▲	164, 166, 168▲, 169▲, 170▲, 171▲▲
1.6 Avstand mellom punkter, linjer og plan	172, 173, 174, 176	173, 175, 177▲, 178▲, 180▲	173, 175, 177▲, 178▲, 179▲, 180▲, 181▲, 182▲▲
1.7 Romfigurer	183, 184, 186	185, 186, 187▲, 188▲, 190▲, 192▲, 196▲	185, 186, 189▲, 191▲, 194▲, 195▲, 196▲, 197▲▲, 198▲▲

15 rette eller gale: s. 327
Blandede oppgaver (199–X1.8): s. 328
Utvalgte løsninger: Lokus.no

Grunnleggende ferdigheter:
Muntlige ferdigheter: 124, 157, 165
Skriftlige ferdigheter: 157, 165, 171
Leseferdigheter: 114, 124, 145
Digitale ferdigheter: 132, 141, 144, 169, 182

Interaktive oppgaver: Lokus.no

1.1 Vektorer i rommet

Sti 1	Sti 2	Sti 3
100, 102, 104, 107, 108, 109, 112	101, 102, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 117▲, 119▲	101, 103, 105, 106, 110, 114▲, 115▲, 116▲, 118▲, 119▲, 120▲

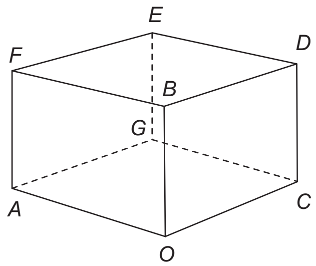
100 Tegn inn punktene $A=(2,0,0)$, $B=(0,4,0)$ og $C=(0,0,3)$ i et koordinatsystem.

101 **a** Et punkt P har både x- og y-koordinat lik null. Hvor må P ligge?
b Q er et punkt som ligger på y-aksen. Hva kan du si om koordinatene til Q?

***102** Tegn inn punktene $O=(0,0,0)$, $P=(2,3,0)$ og $Q=(3,-2,1)$ i et koordinatsystem.
a Regn ut lengdene OP, OQ og PQ.
b O, P og Q danner en trekant. Bruk pytagorassetningen til å avgjøre om trekanten er rettvinklet.

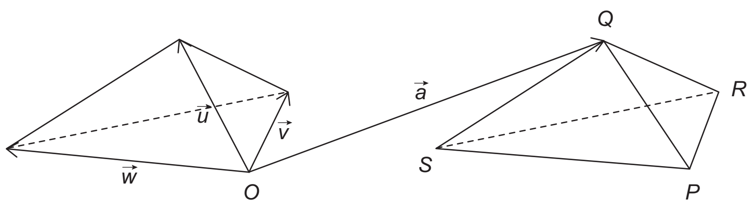
103 Vi har gitt punktene $P=(4,3,12)$ og $Q=(-2,5,-10)$. Bestem avstanden fra hvert av punktene til
a xz-planet **b** origo **c** y-aksen

104 Figuren viser en rektangulær boks.
Hjørnene A, B og C har posisjonsvektorer $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ og $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$.
Finn posisjonsvektorene for de andre hjørnene i boksen uttrykt ved $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$.



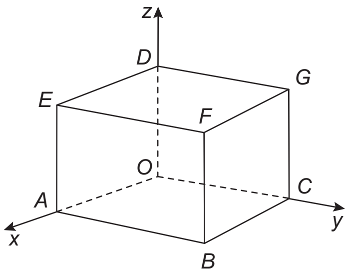
105 To punkter A og B har posisjonsvektorer $2\vec{u}-3\vec{v}+\vec{w}$ og $5\vec{v}-3\vec{w}$. Finn posisjonsvektoren til midtpunktet på linjestykket AB.

106 Figuren nedenfor viser to like tetraedre (romfigur med fire sideflater).



a Finn posisjonsvektorene til P, Q, R og S uttrykt ved $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ og $\vec{a}$.
b Finn en vektor som viser posisjonen til tetraedret til høyre i forhold til tetraedret til venstre.

*107 I den rektangulære boksen med hjørner O, A, B, C, D, E, F og G er $OA = 2$, $OC = 4$ og $OD = 3$.



a Bestem $\overrightarrow{OA}$ og $\overrightarrow{OB}$. b Bestem $\overrightarrow{CG}$ og $\overrightarrow{FE}$. c Bestem $\overrightarrow{CD}$ og $\overrightarrow{AG}$.

108 Regn ut $\vec{u}$ når

a $\vec{u} = [3, -2, 1] + [5, 0, -3]$
b $\vec{u} = [0, 2, -5] + [2, -6, -4]$
c $\vec{u} = [6, 4, 3] - [2, 5, -1]$
d $\vec{u} = [-2, 2, 0] - [4, -1, -3]$
e $\vec{u} = 3 \cdot [1, -4, 3]$
f $\vec{u} = [0, 2, -3] - 5 \cdot [1, -1, -3]$

109 a Bestem $\overrightarrow{QP}$ når P har koordinatene $(1, 0, 2)$ og Q har koordinatene $(5, -2, 2)$.
b Bestem koordinatene til Q når $\overrightarrow{PQ} = [1, -5, -1]$ og P har koordinatene $(2, -4, 3)$.
c Bestem Q slik at $\overrightarrow{QP} = [1, -5, -1]$ når P har koordinatene $(4, -3, -2)$.
d Bestem $\overrightarrow{QP}$ når P har koordinatene $(t, t-1, 2t)$ og Q har koordinatene $(5t-2, -2, 1-t)$.

110 Finn en vektor som har samme retning som $\vec{u}$ og med lengden q når

a $\vec{u} = [3, 0, 0]$ og $q = 7$
b $\vec{u} = [2, 1, -2]$ og $q = 15$
c $\vec{u} = [3, -2, 6]$ og $q = 42$

111 Finn s og t slik at $[7, -1, 4] = [1, 0, 2] + s \cdot [2, -3, 0] + t \cdot [0, 4, 1]$.

112 Finn vinkelen mellom vektorene $\vec{u} = [4, -1, 2]$ og $\vec{v} = [5, 2, -3]$.

113 Bestem vinklene i trekant ABC når $A = (1, 0, 2)$, $B = (4, 2, 5)$ og $C = (7, -2, 1)$.

114▲ Vi har gitt punktene $A = (2, 1, 3)$, $B = (-2, -1, -3)$, $C = (-2, 1, 3)$, $D = (2, 1, -3)$ og $E = (-2, -1, 3)$.

a Hvilke punkter ligger symmetrisk om origo?
b Hvilke punkter ligger symmetrisk om xy-planet?
c Hvilke punkter ligger symmetrisk om z-aksen?

115▲ To punkter har koordinater $(t, t+2, 2t-3)$ og $(t-4, 2t, t+1)$.

a Bestem avstanden mellom punktene når de ligger like høyt over xy-planet.
b Bestem avstanden mellom punktene når de ligger like langt fra xz-planet. Finner du mer enn én løsning?
c Hva er den minste mulige avstanden mellom punktene?

116▲ Tre punkter har posisjonsvektorer $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $4\vec{v}-3\vec{u}$. Vis at de tre punktene ligger på en rett linje.

* **117▲** Bestem t slik at $\vec{u}=[2\,,2\,,5]$ og $\vec{v}=[t\,,2\,,2t]$ står vinkelrett på hverandre.

118▲ a Finn t slik at vektorene $\vec{u}=[2\,,t\,,t-2]$ og $\vec{v}=[t\,,3\,,t]$ står vinkelrett på hverandre.
b Bestem a, b og c slik at vektorene $\vec{u}=[1\,,2\,,3]$, $\vec{v}=[2\,,2\,,a]$ og $\vec{w}=[b\,,c\,,1]$ blir innbyrdes ortogonale.
c Vis at $[b\,,-a\,,0]\perp[a\,,b\,,c]$, $[c\,,0\,,-a]\perp[a\,,b\,,c]$ og $[0\,,c\,,-b]\perp[a\,,b\,,c]$. Finn tre vektorer som står vinkelrett på $[2\,,-3\,,5]$.
d A, B og C har koordinater $A=(3\,,-1\,,0)$, $B=(5\,,2\,,1)$ og $C=(t\,,0\,,t-1)$. Bestem t slik at vinkel BAC blir rett.

119▲ $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er to vilkårlige vektorer. Vis at $|\vec{u}+\vec{v}|\le|\vec{u}|+|\vec{v}|$.
(Hint: Kvadrer begge sider i ulikheten.)
Gi en geometrisk tolkning av ulikheten. I hvilke tilfeller gjelder likhetstegnet?

120▲ Vi har gitt vektoren $\vec{v}=[1\,,2\,,5]$.
a Finn vinkelen α mellom $\vec{v}$ og x-aksen.
b Finn vinkelen β mellom $\vec{v}$ og y-aksen.
c Finn vinkelen γ mellom $\vec{v}$ og z-aksen.
d Regn ut $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$.
e Vis at resultatet fra oppgave d gjelder generelt.

1.2 Parameterframstillinger

Sti 1	Sti 2	Sti 3
121, 122, 125, 126	123, 124, 125, 126, 128▲, 130	123, 124, 126, 127▲, 128▲, 129▲, 130, 131▲

121 a Bestem en parameterframstilling for en rett linje som går gjennom $(3\,,-1\,,2)$ og har $\vec{v}=[2\,,1\,,-1]$ som retningsvektor.
b Bestem en parameterframstilling for en linje som går gjennom $(-5\,,4\,,-12)$ og er parallell med $\vec{v}=[0\,,-4\,,3]$.
c Bestem en parameterframstilling for y-aksen.
d Bestem en parameterframstilling for en linje som skjærer x-aksen for $x=3$ og er parallell med z-aksen.

122 a En linje har parameterframstillingen
$x=2+4t \quad\wedge\quad y=-1-t \quad\wedge\quad z=11+2t$
Bestem et punkt på linja og en retningsvektor for linja.
b En linje har parameterframstillingen
$x=5 \quad\wedge\quad y=3t-1 \quad\wedge\quad z=15t$
Bestem et punkt på linja og en retningsvektor for linja.

*123 a En linje l går gjennom $(0, -2, 2)$ og $(4, -1, 2)$.
Finn en parameterframstilling for l.
b En linje m er parallell med l og går gjennom $(1, 1, 2)$.
Bestem en parameterframstilling for m.

124 a Beskriv to metoder for å sjekke om tre punkter ligger på en rett linje.
b Bruk den ene metoden til å undersøke om $P = (3, 0, 2)$, $Q = (0, 4, -2)$ og $R = (-6, 12, -10)$ ligger på en rett linje.
c Bruk den andre metoden til å avgjøre om $A = (5, 2, -12)$, $B = (-3, 4, 2)$ og $C = (13, 0, 15)$ ligger på en rett linje.

*125 Et plan har parameterframstillingen
$x = 1 + s + 4t \quad \wedge \quad y = 2s - t \quad \wedge \quad z = 2 - s + t$
a Skriv ned koordinatene til et punkt i planet.
b Skriv ned to vektorer som er parallelle med planet.
c Avgjør om $(6, 1, 2)$ ligger i planet.

126 a Finn en parameterframstilling for et plan som inneholder punktene $O = (0, 0, 0)$, $A = (2, 0, 5)$ og $B = (4, 1, 7)$.
b Finn en parameterframstilling for et plan som inneholder punktene $A = (2, 0, 5)$, $B = (4, 1, 7)$ og $C = (4, 4, 7)$.
c Finn en parameterframstilling for et plan som inneholder punktene $A = (-1, 4, -3)$, $B = (0, 1, -4)$ og $C = (5, -4, 3)$.

127▲ Planet som inneholder x- og y-aksen, kaller vi xy-planet. For alle punkter i xy-planet er $z = 0$. Finn skjæringspunktet mellom linja gitt ved
$x = 6 - 3t \quad \wedge \quad y = 4 + 2t \quad \wedge \quad z = -2 + t$ og
a xy-planet b xz-planet c yz-planet

128▲ En rett linje går gjennom $P = (2, -1, 4)$ og har retningsvektor $\vec{v} = [1, -2, 2]$. Finn to punkter på linja som har avstand 12 fra P.

129▲ Vi har gitt linjene
l: $x = 4t + 1 \quad \wedge \quad y = t - 1 \quad \wedge \quad z = -t + 1$
m: $x = -2s - 2 \quad \wedge \quad y = 2s + 1 \quad \wedge \quad z = 3s$
a Vis at linjene ikke er parallelle.
b Bestem vinkelen mellom l og m.
c Finn eventuelle skjæringspunkter mellom l og m.

130 To linjer l og m er gitt ved $[x, y, z] = [1, 0, 3] + t \cdot [4, -1, 1]$ og $[x, y, z] = [4, -2, 2] + t \cdot [5, 1, -2]$.
Finn en parameterframstilling for et plan som inneholder l, og som er parallelt med m.

131▲ Vi har gitt parameterframstillingen
$x = 1 - s + 2t \quad \wedge \quad y = 5 + 3s - 6t \quad \wedge \quad z = 2s - 4t$
Hvorfor kan dette ikke være parameterframstillingen for et plan?

1.3 Vektorprodukt

Sti 1	Sti 2	Sti 3
132, 133, 136▲, 141▲, 144▲	132, 133, 135, 138▲, 140▲, 141▲, 145▲, 146▲	132, 133, 134, 137▲, 139▲, 140▲, 141▲, 142▲, 143▲, 145▲, 147▲▲

132 Finn en vektor som står vinkelrett på $\vec{u}$ og $\vec{v}$ når
- **a** $\vec{u} = [1, 0, 1]$ og $\vec{v} = [1, 2, 0]$
- **b** $\vec{u} = [3, 1, 2]$ og $\vec{v} = [1, 2, 3]$
- **c** $\vec{u} = [4, -1, 2]$ og $\vec{v} = [2, -2, -3]$

133 **a** Vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt ved $\vec{u} = [a, b, 0]$ og $\vec{v} = [c, d, 0]$. Hva kan du si om retningen til $\vec{u} \times \vec{v}$?
- **b** Finn $\vec{u} \times \vec{v}$ uttrykt ved *a*, *b*, *c* og *d*.

134 Bruk regelen $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d}$ til å regne ut
- **a** $(\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) \times (5\vec{e}_x - 4\vec{e}_y - \vec{e}_z)$
- **b** $[4, -2, 3] \times [5, 4, -1]$

* **135** Punktene $A = (1, 4, 5)$, $B = (4, 4, 2)$, $C = (-2, -1, 7)$ og D danner et parallellogram. Bestem koordinatene til D og finn arealet av parallellogrammet.

136▲ **a** En trekant er utspent av $\vec{u} = [4, -3, 1]$ og $\vec{v} = [1, 2, 3]$. Regn ut arealet av trekanten.
- **b** Regn ut arealet av trekant *ABC* når $A = (4, -1, -1)$, $B = (7, 1, -3)$ og $C = (6, -4, -2)$.
- **c** Trekanten *ABC* har et hjørne på hver av koordinataksene. $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$ og $C = (0, 0, c)$. Finn arealet av $\triangle ABC$ uttrykt ved *a*, *b* og *c*.

137▲ Vi har gitt vektorene $\vec{u} = [1, 0, 0]$ og $\vec{v} = [\cos\alpha, \sin\alpha, 0]$, der $0 \le \alpha \le 180°$.
- **a** Hva er $|\vec{u}|$ og $|\vec{v}|$?
- **b** Vis at vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er α.
- **c** Hva blir $\vec{u} \times \vec{v}$?
- **d** Hvordan stemmer svarene ovenfor med formelen $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$, der α er vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$?

138▲ For de tre vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ får vi oppgitt at $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$.
Vis at $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{w} \times \vec{u}$.

139▲ *A* og *B* er to punkter som ligger på linja *l*. *P* er et punkt som har avstand *D* fra *l*.
- **a** Sett opp to uttrykk for arealet av trekant *ABP*.
- **b** Bruk uttrykkene i oppgave a til å vise at $D = \dfrac{|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}$.
- **c** Finn avstanden mellom punktet $P = (3, 0, 2)$ og linja som går gjennom $A = (7, 5, -1)$ og $B = (5, 6, 4)$, ved å bruke formelen i oppgave b.

140▲ Vis at $|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2\,|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$.

141▲
a Vis at punktene $A=(2\,,0\,,5)$, $B=(4\,,1\,,7)$, $C=(4\,,4\,,7)$ og $D=(2\,,3\,,5)$ er hjørnene i en rombe.
b Finn arealet av romben.

142▲ Et tetraeder har hjørner i $O=(0\,,0\,,0)$, $A=(a\,,0\,,0)$, $B=(0\,,b\,,0)$ og $C=(0\,,0\,,c)$. Finn volumet av tetraedret uttrykt ved a, b og c ved å bruke volumprodukt. Kontroller svaret ved å bruke formelen for volumet av en pyramide, $V=\frac{1}{3}G\cdot h$.

143▲ Pyramiden med grunnflaten $ABCD$ har hjørner $A=(0\,,0\,,0)$, $B=(6\,,2\,,3)$, $C=(4\,,4\,,2)$, $D=(-2\,,2\,,-1)$ og $E=(1\,,2\,,10)$.
a Hvordan må grunnflaten være for at du skal kunne bruke volumprodukt til å finne volumet av pyramiden? Undersøk om grunnflaten oppfyller kravet.
b Regn ut volumet av pyramiden.

*144▲ Et tetraeder har hjørnene $A=(1\,,0\,,2)$, $B=(4\,,2\,,0)$, $C=(2\,,6\,,1)$ og $D=(3\,,4\,,5)$.
a Regn ut arealet av grunnflaten ABC.
b Regn ut volumet av tetraedret.
c Finn høyden til D over grunnflaten. (Hint: Volumet av en pyramide er $V=\frac{1}{3}G\cdot h$.)

«Pyramidekasino» i Las Vegas, Nevada

145▲ Et parallellepiped er utspent av vektorene $\vec{u}=[4,-1,1]$, $\vec{v}=[1,2,-3]$ og $\vec{w}=[2,5,1]$.
a Regn ut volumet av parallellepipedet.
b Hva ville volumet være hvis vi «rettet» ut parallellepipedet? Det vil si at vi beholder alle lengder, men alle vinkler mellom sidekanter blir 90°.

146▲ a Avgjør om punktene $A=(1,-1,1)$, $B=(4,1,3)$, $C=(3,0,4)$ og $D=(2,2,5)$ ligger i samme plan.
b Avgjør om punktene $A=(1,1,7)$, $B=(4,0,-2)$, $C=(0,-1,3)$ og $D=(2,-2,4)$ ligger i samme plan.

147▲▲ Vi har gitt vektorene $\vec{u}=[1,1,1]$ og $\vec{v}=[1,2,3]$.
a Regn ut $\vec{u}\times\vec{v}$.
b Finn en vektor $\vec{w}\neq\vec{v}$ slik at $\vec{u}\times\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$.

1.4 Plan

Sti 1	Sti 2	Sti 3
148, 149, 150, 151, 157	150, 151, 154, 155, 156, 158, 159▲	150, 153, 155, 158, 159▲, 160▲, 161▲, 162▲

148 To plan Π og Σ er gitt ved $3x-2y+z-6=0$ og $9x-6y+3z-18=0$. Skriv normalvektorene for Π og Σ. Er Π og Σ parallelle? Er de sammenfallende?

149 Finn likningen til planet som går gjennom Q og har normalvektoren $\vec{n}$ når
a $Q=(2,1,0)$ og $\vec{n}=[3,1,2]$
b $Q=(-1,4,-6)$ og $\vec{n}=[0,3,-2]$
c $Q=(5,-4,-7)$ og $\vec{n}=[12,-8,6]$

* **150** Et plan Π er gitt ved $x-2y+5z=0$. Finn likningen for et plan som er parallelt med Π og går gjennom $(2,-5,1)$.

151 a Bestem likningen for planet som går gjennom $A=(1,-1,1)$, $B=(4,1,3)$ og $C=(3,0,4)$.
b Bestem likningen for planet som går gjennom $A=(-4,-1,0)$, $B=(-3,1,3)$ og $C=(0,6,-7)$.

152 a Et plan står vinkelrett på linja
l: $x=1+4t \quad \wedge \quad y=-t \quad \wedge \quad z=2+t$
og går gjennom origo. Finn likningen for planet.
b Et plan står vinkelrett på linja
l: $x=3-2t \quad \wedge \quad y=4+4t \quad \wedge \quad z=2-4t$
og går gjennom $(1,-5,-3)$. Finn likningen for planet.

153 **a** Hva er likningen for yz-planet?
b Et plan er parallelt med xz-planet og har avstand 6 fra dette planet. Hva kan likningen for dette planet være?
c Et plan skjærer hver av aksene 2 enheter fra origo, på den positive siden. Hva er likningen for planet?

154 Et plan går gjennom punktene $(1, 5, 3)$, $(4, 2, 3)$ og $(-1, -2, 3)$. Finn likningen for planet. Klarer du det uten å bestemme normalvektor?

155 **a** Et plan inneholder linja
$x = 1 + t \quad \wedge \quad y = -2t \quad \wedge \quad z = 2 + t$
og går gjennom $(-1, -2, 3)$. Finn likningen for planet.
b Et plan inneholder x-aksen og går gjennom $(5, -4, 3)$. Hva er likningen for dette planet?
c Et plan inneholder linjene
$x = 4 + 4t \quad \wedge \quad y = 2t \quad \wedge \quad z = -2 + 5t$ og
$x = -1 + 4t \quad \wedge \quad y = 6 + 2t \quad \wedge \quad z = 5t$
Hva er likningen for planet?
d Et plan inneholder z-aksen og linja
$x = 1 \quad \wedge \quad y = 2 \quad \wedge \quad z = t$
Hva er likningen for planet?

156 Bestem likningen for et plan som står vinkelrett på to plan,
a $2x + y - z = 10$ og $x - y + z = 3$, og går gjennom origo
b $x + 2y - z = 5$ og $3x + y - 4z = 8$, og går gjennom $(1, 0, 4)$

*157 **a** Hva mener vi med vinkelen mellom to plan?
b Forklar hvordan du kan finne ut om to plan står vinkelrett på hverandre.
c Hva er vinkelen mellom planene $x - y - z = 4$ og $x - 2y + 3z = 6$?

158 Finn vinkelen mellom
a xy-planet og planet $x - y + 4z = 8$
b xz-planet og planet $3x - 3y + 4z = 18$

159▲ Vi har gitt punktene $A = (2, 0, 2)$ og $B = (4, 2, 0)$. La $P = (x, y, z)$ være et punkt som ligger like langt fra A som fra B.
a Et plan ligger midt mellom A og B. Bestem likningen for dette planet.
b Ta utgangspunkt i at $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{BP}\right|$, og bruk det til å finne en likning som koordinatene til P må oppfylle. Sammenlikn med svaret i oppgave a.

160▲ **a** Hvor ligger alle punktene som har en gitt avstand fra et plan?
b Et plan Π har likning $x + 2y + 2z = 9$. Finn likningen for to plan som har avstand 6 fra Π.

161▲ To plan har x-aksen som skjæringslinje. $P=(2,-5,1)$ er et punkt i det ene planet, og $Q=(-2,1,0)$ er et punkt i det andre planet. Finn vinkelen mellom planene.

162▲ Et plan inneholder x-aksen og danner vinkelen 30° med xy-planet.
- **a** Forklar at en normalvektor for planet ikke kan ha noen komponent i x-retningen.
- **b** Finn likningen for planet. Er planet entydig bestemt?

1.5 Mer om plan og linjer

Sti 1	Sti 2	Sti 3
163, 164, 166	164, 165, 166, 167, 168▲	164, 166, 168▲, 169▲, 170▲, 171▲▲

163
- **a** En rett linje l og et plan Π har ingen felles punkter. Hva kan du si om normalvektoren til Π og retningsvektoren til l?
  Avgjør om l og Π skjærer hverandre når
- **b** l: $[x,y,z]=[2,0,1]+t\cdot[3,-1,1]$ og Π: $-x-2y+z=7$
- **c** l: $[x,y,z]=[0,1,1]+t\cdot[4,-5,2]$ og Π: $x+y+z=7$

***164** En rett linje l går gjennom $(1,-1,1)$ og $(0,-1,2)$.
- **a** Finn en parameterframstilling for linja.
- **b** Et plan Π er gitt ved likningen $2x+y-z=5$. Avgjør om l skjærer Π.
- **c** Finn eventuelle skjæringspunkter mellom l og Π.

165 To plan har likningene $2x+y-z=4$ og $x-y+3z=6$.
- **a** Forklar at de to planene må skjære hverandre.
- **b** Forklar at vektorproduktet av normalvektorene til de to planene er en retningsvektor for skjæringslinja.
- **c** Bestem en parameterframstilling for skjæringslinja mellom de to planene.

166
- **a** α er vinkelen mellom en rett linje og et plan. Hvilke verdier kan α ha?
  Bestem vinkelen mellom linja l og planet Π når
- **b** l er gitt ved $[x,y,z]=[2,0,3]+t\cdot[3,-1,2]$ og Π er gitt ved $2x-y+4z=8$
- **c** l er gitt ved $[x,y,z]=t\cdot[1,5,-2]$ og Π er gitt ved $12x-3y+4z=24$
- **d** l er gitt ved $[x,y,z]=[1,1,3]+t\cdot[4,-2,11]$ og Π er gitt ved $y=9$

167 Undersøk om linja
$x=t+1 \quad \wedge \quad y=2t \quad \wedge \quad z=-t+4$
ligger i planet $3x-y+z=7$.

***168▲**
- **a** Bestem skjæringslinja mellom to plan Π: $x+2y+z=4$ og Σ: $2x+y-z=5$.
- **b** Finn en likning for planet som går gjennom $A=(2,0,2)$ og $B=(4,1,0)$, og er parallelt med linja i oppgave a.

169▲ a Vis at tre plan gitt ved $x - y - z + 1 = 0$, $4x - 3y - z + 2 = 0$ og $y + 3z - 2 = 0$ skjærer hverandre i en linje, og finn en parameterframstilling for linja.
b Finn skjæringspunktet mellom tre plan $x + y - z + 1 = 0$, $x - 3y + z + 3 = 0$ og $y + z - 2 = 0$.
c Finn skjæringspunktet mellom tre plan $x - y + 2z - 1 = 0$, $2x + y - z - 8 = 0$ og $5x - 2y + 4z - 11 = 0$.

170▲ a Bestem et punkt på linja og en retningsvektor for linja gitt ved likningsframstillingen $x - 1 = \frac{y+2}{4} = \frac{z-2}{2}$.
b Finn en likningsframstilling for en linje som går gjennom $(4, -1, 2)$ og er parallell med $[3, -2, 1]$.
c Finn en likningsframstilling for skjæringslinja mellom to plan gitt ved $x - y - z + 1 = 0$ og $y + 3z - 2 = 0$.

171▲▲ a Forklar at hvis likningssettet
$a_1x + b_1y + c_1z - d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z - d_2 = 0$, $a_3x + b_3y + c_3z - d_3 = 0$
har én løsning, så er $[a_1, b_1, c_1] \cdot ([a_2, b_2, c_2] \times [a_3, b_3, c_3, d_3]) \neq 0$.
b Undersøk om likningssettet $4x + y + 2z - 2 = 0$, $2x + 2y - z - 9 = 0$ og $3x - 2y + z - 1 = 0$ har én løsning, og finn eventuelt løsningen.

1.6 Avstand mellom punkter, linjer og plan

Sti 1	Sti 2	Sti 3
172, 173, 174, 176	173, 175, 177▲, 178▲, 180▲	173, 175, 177▲, 178▲, 179▲, 180▲, 181▲, 182▲▲

172 En rett linje er gitt ved $[x, y, z] = [1, 2, 3] + t \cdot [1, -1, 2]$. Finn avstanden mellom linja og punktet $(4, 2, 0)$.

***173** En linje l går gjennom $(4, 2, -3)$ og $(2, -1, -2)$.
a Finn en parameterframstilling for l.
En linje m er parallell med l og går gjennom $(0, 2, 1)$.
b Bestem en parameterframstilling for m.
c Regn ut avstanden mellom l og m.

174 Planet Π har likningen $2x - 2y - z = 6$.
a Bestem avstanden fra origo til Π.
b Bestem avstanden mellom Π og planet $2x - 2y - z = -9$.
c Bestem avstanden fra punktet $(4, -1, 2)$ til Π.

175 Bestem d slik at avstanden mellom to plan $2x-2y-z-3=0$ og $2x-2y-z-d=0$ blir 12.

176 En linje l har parameterframstillingen

$x=2+t \quad \wedge \quad y=-4 \quad \wedge \quad z=4-2t$

- **a** Finn avstanden fra l til xz-planet.
- **b** Finn avstanden fra l til hver av koordinataksene.

177▲ Et plan er gitt ved likningen $x+2y+2z-6=0$.

- **a** Vis at $P=(2\,,3\,,-1)$ er et punkt i planet, og at $Q=(-1\,,0\,,-3)$ ikke er et punkt i planet.
- **b** Finn en normalvektor $\vec{n}$ til planet og regn ut lengden av $\vec{n}$.
- **c** Regn ut $\dfrac{\left|\overrightarrow{QP}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$. Tegn en figur som viser hva svaret ditt betyr.

178▲ Vi har gitt linjene
l: $x=4t+1 \quad \wedge \quad y=t-1 \quad \wedge \quad z=-t+1$
m: $x=-2s-2 \quad \wedge \quad y=2s+1 \quad \wedge \quad z=3s$

- **a** P er et punkt på l, og Q er et punkt på m. Finn $\overrightarrow{PQ}$ uttrykt ved parametrene s og t.
- **b** Bestem s og t slik at $\overrightarrow{PQ}$ står vinkelrett på både l og m.
- **c** Regn ut lengden av $\overrightarrow{PQ}$ i oppgave b. Hva har du funnet?

179▲ Et plan har likningen $ax+by+cz+d=0$. En rett linje går gjennom origo O og står vinkelrett på planet.

- **a** Finn en parameterframstilling for linja.
- **b** Finn skjæringspunktet P mellom linja og planet, uttrykt ved a, b, c og d.
- **c** Bestem $\left|\overrightarrow{OP}\right|$ uttrykt ved a, b, c og d.

***180▲** To linjer l og m er gitt ved $[x\,,y\,,z]=[1\,,0\,,0]+t\cdot[2\,,-1\,,1]$ og $[x\,,y\,,z]=[3\,,-2\,,2]+t\cdot[3\,,1\,,-2]$.

- **a** Finn likningen for et plan som inneholder l, og som er parallelt med m.
- **b** Bestem avstanden mellom l og m.

181▲ En linje l skjærer z-aksen for $z=4$ og y-aksen for $y=3$. En linje m skjærer x-aksen for $x=6$ og y-aksen for $y=-2$. Bestem avstanden mellom l og m.

182▲▲ Posisjonen til et fly er gitt ved vektorlikningen $[x\,,y\,,z]=[-25\,,18\,,11]+t\cdot[550\,,-100\,,-4]$. x-, y- og z-koordinatene viser antall kilometer flyet er øst for, nord for og over et punkt $O=(0\,,0\,,0)$ på bakken. t er antall timer etter at flyet var i posisjonen $(-25\,,18\,,11)$.

- **a** Hvor langt beveger flyet seg i løpet av en time? Hva er farten til flyet?
- **b** Ved hvilket tidspunkt er flyet 4000 m over bakken? Hva er posisjonen til flyet da?
- **c** Hva er den minste avstanden flyet har til O? Hvor lang er denne avstanden?
- **d** Et annet fly har posisjon gitt ved $[x\,,y\,,z]=[0\,,0\,,8]+t\cdot[250\,,-400\,,0]$. Hva er den minste avstanden mellom de to flyene?

1.7 Romfigurer

Sti 1	Sti 2	Sti 3
183, 184, 186	185, 186, 187▲, 188▲, 190▲, 192▲, 196▲	185, 186, 189▲, 191▲, 194▲, 195▲, 196▲, 197▲▲, 198▲▲

183 Hva er likningen for en kuleflate
- a med radius lik 8 og sentrum i origo
- b med radius lik 4 og sentrum i $(2\,,4\,,1)$
- c med radius lik 6 og sentrum i $(-2\,,3\,,-1)$

184
- a En kuleflate har likningen $x^2+y^2+z^2-4x+2y+8z=4$. Finn sentrum og radius til kula.
- b En kuleflate har likningen $x^2+y^2+z^2+2x-12y+16z+1=0$. Finn sentrum og radius til kula.
- c En kuleflate har likningen $x^2+y^2+z^2+6x-y-14z=2$. Finn sentrum og radius til kula.

185 P er et punkt på kuleflaten $x^2+y^2+z^2-2x+6y+2z=5$, og Q er et punkt på kuleflaten $x^2+y^2+z^2+8x-4y-2z=15$. Finn den størst mulige avstanden mellom P og Q.

***186** Et parallellepiped er utspent av vektorene $\vec{u}=[3\,,-1\,,0]$, $\vec{v}=[5\,,1\,,2]$ og $\vec{w}=[0\,,4\,,6]$.
- a Regn ut overflaten til parallellepipedet.
- b Bestem volumet av parallellepipedet.

187▲
- a Beskriv flaten gitt ved $x^2+y^2+z^2-64=0$.
- b Et plan er gitt ved $2x+2y-z=18$. Bestem avstanden fra origo til planet.
- c Skjæringskurven mellom flaten i oppave a og planet i oppave b er en sirkel. Bestem radius og sentrum for sirkelen.

188▲
- a En kuleflate går gjennom punktet $(6\,,1\,,4)$. Bestem likningen for kuleflaten når sentrum har koordinatene $(4\,,3\,,5)$.
- b En kule har sentrum i $(1\,,-1\,,0)$ og tangerer planet $3x+12y-4z=329$. Finn likningen for kula.

189▲ Et tetraeder er avgrenset av fire plan gitt ved $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ og $2x-y+4z-4=0$.
- a Bestem hjørnene i tetraedret.
- b Regn ut volumet av tetraedret.
- c Finn arealet av den største sideflaten og vinkelen denne sideflaten danner med xy-planet.

190▲ Vi har gitt tre punkter $A=(3,-1,2)$, $B=(5,4,-1)$ og $C=(3,0,5)$.

- **a** Bestem $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.
- **b** Finn en parameterframstilling for linja som går gjennom B og C.
- **c** Regn ut $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ og finn arealet av trekant ABC.
- **d** Finn likningen for planet som A, B og C ligger i.
- **e** Et punkt D ligger slik at volumet av tetraedret $ABCD$ er $\dfrac{100}{3}$. Finn likningen til to plan der D må ligge.

191▲ En kuleflate har likning $x^2+y^2+z^2-4x+4y-8z=1$.

- **a** Finn sentrum og radius for kula.
- **b** Et plan har likning $x-2y-2z=k$. Snittsirkelen mellom dette planet og kuleflaten har radius 4. Bestem k.

192▲

- **a** Vis at punktene $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ og $(0,1,1)$ er hjørner i et regulært tetraeder (et tetraeder der alle sidekantene er like lange).
- **b** Finn vinkelen mellom sidekantene.
- **c** Vis at punktet $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ er like langt fra hvert av punktene gitt i oppgave a.
- **d** Et metanmolekyl har ett C-atom plassert i $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ og H-atomer i hvert av punktene gitt i oppgave a. Finn bindingsvinkelen i metanmolekylet, dvs. vinkelen HCH, der de to H-ene er to forskjellige H-atomer.

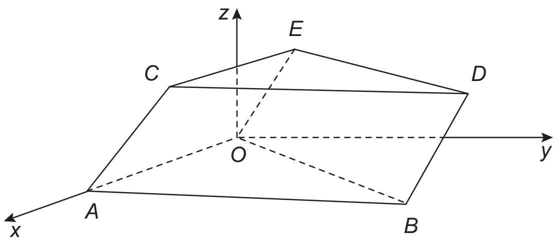
193▲ En pyramide har grunnflate med hjørner $O=(0,0,0)$, $A=(8,0,0)$, $B=(8,6,0)$ og $C=(0,6,0)$.

- **a** Toppunktet D til pyramiden ligger på linja l som står vinkelrett på grunnflaten og skjærer grunnflaten i $(4,3,0)$. Bestem en parameterframstilling for l.
- **b** Pyramiden har volum 36. D har positiv z-koordinat. Hva er koordinatene til D?
- **c** Bestem likningen for planet gjennom B, C og D.
- **d** Regn ut vinkelen som sideflaten BCD danner med grunnflaten.
- **e** Regn ut vinkelen mellom sidekantene DB og DC.

194▲ Et plan går gjennom $A=(5,0,0)$, $B=(3,4,0)$ og $C=(4,0,3)$.

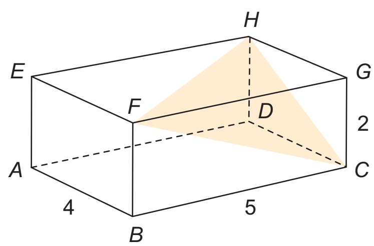
- **a** Finn likningen for planet og avstanden fra origo til planet.
- **b** Vis at A, B og C ligger på en kuleflate med sentrum i origo, og finn likningen til kuleflaten.
- **c** Finn overflaten til den minste romfiguren avgrenset av planet i oppgave a og kuleflaten i oppgave b.

***195▲** Et prisme har grunnflate OAB, der $O=(0,0,0)$, $A=(3,0,0)$, $B=(3,4,0)$. C har koordinatene $(2,1,1)$.



- **a** Bestem koordinatene til D og E.
- **b** Regn ut overflaten til prismet.
- **c** Regn ut vinkel ABD.
- **d** Finn likningen for planet som inneholder sideflaten $ABDC$.
- **e** Regn ut vinkelen mellom sideflatene OAB og $ABDC$.

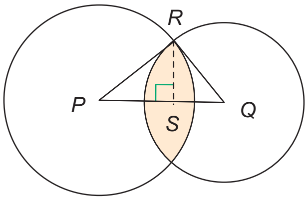
196▲



$ABCDEFGH$ er et rektangulært, rett prisme.

- **a** Punktene C, F og H ligger i et plan Π. Finn vinkelen mellom Π og planet som inneholder A, B, C og D.
- **b** Hvor stor er vinkelen mellom Π og en linje gjennom C og E?
- **c** Π deler prismet i to deler. Bestem forholdet mellom volumet til den minste delen og den største delen.

197▲▲ En kule med sentrum i Q har likningen $x^2+y^2+z^2-2x+6y-6z-30=0$, og en kule med sentrum i P har likningen $x^2+y^2+z^2-10x-18y+6=0$.



a Bestem koordinatene til P og Q.
b Bestem avstanden mellom P og Q og bruk dette til å finne PS.
c Regn ut overflaten til den minste romfiguren avgrenset av de to kuleflatene (markert på figuren).

198▲▲ Et tetraeder har hjørner i $O=(0,0,0)$, $A=(8,0,0)$, $B=(0,5,0)$ og $C=(0,0,6)$.
a Tegn inn tetraedret i et koordinatsystem.
b Hva er vinklene mellom planene som møtes i origo?
c Arealet av de tre sideflatene som møtes i origo, kaller vi A_1, A_2 og A_3. Regn ut A_1, A_2 og A_3.
d Regn ut arealet A_4 av den siste sideflaten. Vis at $A_1^2+A_2^2+A_3^2=A_4^2$.
e La $O=(0,0,0)$, $A=(a,0,0)$, $B=(0,b,0)$ og $C=(0,0,c)$.
Vis at $A_{OAB}^2+A_{OAC}^2+A_{OBC}^2=A_{ABC}^2$.
Dette resultatet kaller vi Pytagoras' arealsetning, og den gjelder når tre sideflater står vinkelrett på hverandre i et tetraeder.

15 rette eller gale

1 To linjer som ikke er parallelle, må skjære hverandre.
2 Vektorproduktet av to parallelle vektorer er nullvektor.
3 En rett linje med retningsvektor $\vec{v}$ ligger i et plan med normalvektor $\vec{n}$. Da er $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$.
4 P ligger på y-aksen, 4 enheter i positiv y-retning fra origo, og Q ligger på z-aksen, 3 enheter i positiv z-retning fra origo. Da er $\overrightarrow{PQ}=[0,-4,3]$.
5 Tre ulike punkter er tilstrekkelig for å bestemme et plan, uansett hvordan punktene ligger.
6 Hvis x-aksen i et høyrehåndssystem peker vertikalt oppover og y-aksen peker horisontalt bort fra deg, så peker z-aksen til venstre.
7 $\left|(\vec{e}_x+\vec{e}_y)\times\vec{e}_z\right|=\sqrt{2}$
8 Linja gitt ved $[x,y,z]=[2,0,1]+t\cdot[3,-1,1]$ skjærer planet $x-5y-2z=17$.
9 Volumproduktet $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$ er en skalar.
10 Avstanden fra punktet $(2,4,-7)$ til planet $z=2$ er 9.
11 Vektoren $[5,5,5]$ er lengre enn vektoren $[0,10,0]$.
12 Vinkelen mellom et plan og en linje kan være i intervallet $[0°,180°]$.
13 Volumet av et trekantet prisme der $\vec{u}$ og $\vec{v}$ utspenner grunnflaten og $\vec{w}$ er en sidekant, er $\frac{1}{2}\left|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}\right|$.
14 Planet $x+2y+3z=6$ skjærer x-aksen i 6, y-aksen i 3 og z-aksen i 2.
15 Kuleflatene gitt ved $x^2+y^2+z^2=1$ og $x^2+(y-4)^2+z^2=9$ tangerer hverandre.

Blandede oppgaver

199 Et plan Π har likningen $2x - 2y - z = 5$.

a Undersøk om punktet $A = (3, -1, 3)$ ligger i planet.

b Punktet B har koordinatene $B = (11, -9, -1)$. Vis at $\overrightarrow{AB}$ står vinkelrett på planet Π.

c Et punkt C er bestemt ved at B og C ligger symmetrisk om planet Π. Bestem koordinatene til C.

X1.1 Planet α er gitt ved likningen

$$8x + 6y + 3z = 24$$

a Forklar at α går gjennom punktene $(3, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$ og $(0, 0, 8)$.

b Finn en normalvektor til α.

c Bestem avstanden fra origo til α.

(Eksamen 3MX høsten 2004)

X1.2 a Vis at likningen $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z = 3$ beskriver en kuleflate.

b Finn koordinatene til sentrum og radius til kula.

c Vis at punktet $A(2, 0, 1)$ ligger på kuleflata.

Linja gjennom sentrum i kula og punktet A skjærer kuleflata i et annet punkt B.

d Finn koordinatene til B.

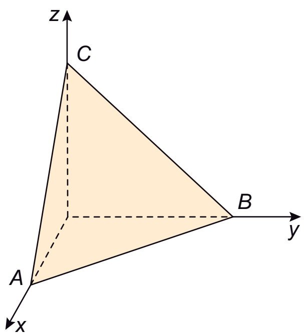
(Eksamen 3MX høsten 2005)

X1.3 Et plan α skjærer koordinataksene i punktene $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ og $C(0, 0, c)$, der $a \neq 0$, $b \neq 0$ og $c \neq 0$.

a Bestem vektorkoordinatene til $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

b Vis at $\vec{v} = [bc, ac, ab]$ er en normalvektor til planet α.

c Finn likningen til planet α og vis at den kan skrives som $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.



(Eksamen 3MX våren 2004, endret)

X1.4 Figuren viser et rett prisme, der $OA = 2$, $OC = 3$ og $OD = 5$. Prismet er plassert i et koordinatsystem slik at O ligger i origo, A ligger på x-aksen, C ligger på y-aksen og D ligger på z-aksen.

a Skriv koordinatene til punktene C, E og F.

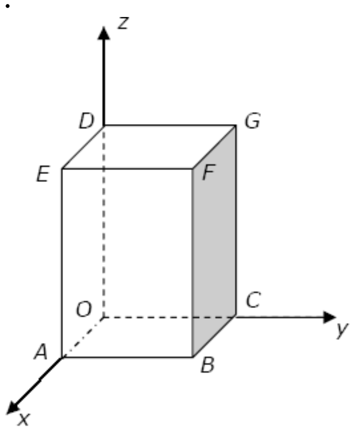
b Finn $|\overrightarrow{CE}|$. Bestem vinkelen ECF.

c En rett linje l går gjennom punktene C og E. Finn en parameterframstilling for l.

d Undersøk om de to diagonalene CE og AG skjærer hverandre.

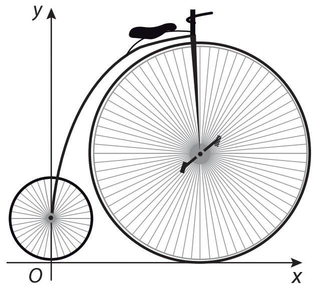
e Finn likningen for et plan α som går gjennom O, og som står normalt på $\overrightarrow{CE}$.

f Finn avstanden fra C til α.



(Privatisteksamen 3MX våren 2006)

X1.5



En gammel sykkel er tegnet inn i et koordinatsystem. Bakhjulet er en sirkel gitt ved likningen $x^2 + y^2 - 6y = 0$, mens det store forhjulet er gitt ved $x^2 + y^2 - 28x - 20y + 196 = 0$.

a Finn radius og koordinatene til sentrum i hvert av de to hjulene.
b Hvor stor er den minste avstanden mellom de to hjulene?

(Eksamen 3MX våren 2007, endret)

X1.6 I et koordinatsystem er gitt punktene $A(1, 1, 0)$, $B(4, 1, 1)$ og $C(2, 0, -1)$.

a Regn ut $\angle ABC$.
Punktene A, B og C ligger i et plan α.
b Finn likningen for α.
Et punkt D har koordinatene $(3, 10, 4)$.
c Bestem volumet av pyramiden $ABCD$.
En rett linje går gjennom D, er parallell med planet α og skjærer z-aksen i punktet P.
d Regn ut koordinatene til P.

(Eksamen 3MN våren 1995)

X1.7 Et plan α er gitt ved $2x - 3y + z - 13 = 0$.

a Regn ut vinkelen mellom α og y-aksen.
En rett linje l er gitt ved parameterframstillingen

$$x = t + 2 \quad \wedge \quad y = 2t - 8 \quad \wedge \quad z = 4t - 7$$

b Vis at linja l ligger i α.
Et plan β inneholder linja l og står vinkelrett på α.
c Finn likningen for β.
Et punkt P har koordinatene $(e^k - 1, 2e^k - 6, e^{2k})$, der k er et reelt tall.
d For hvilke verdier av k ligger punktet P i α?
e Bestem den største avstanden fra punktet P til planet α, når P og origo ligger på samme side av planet α.

(Eksamen 3MN våren 1996)

X1.8 I et koordinatsystem er gitt punktene $P(3, -4, 2)$ og $Q(-2, 6, 7)$. Planet α er gitt ved likningen $2x - y + z - 3 = 0$.

a Finn avstanden fra P til α.
b Den rette linjen gjennom P og Q skjærer α i punktet R.
Bestem koordinatene til R.
c Vis at punktene P og Q ligger på hver sin side av α.
d Bestem koordinatene til midtpunktet av linjestykket PQ.
e Bestem de punktene i α som har samme avstand til P som til Q.

(Eksamen 3MN høsten 1996)

Utdrag fra læreplanen

Formål

Matematikk er et fag som på en sentral måte preger vår moderne sivilisasjon, både som redskap til å forstå og fungere i samfunnet og som bærer av en tradisjon med røtter i mange av verdens gamle kulturer. Matematikk brukes til å utforske universet, systematisere erfaringer og beskrive og forstå naturgitte og samfunnsmessige sammenhenger. Menneskets glede over arbeidet med faget i seg selv har vært en inspirasjonskilde til utvikling av matematikken.

Et viktig formål med programfaget er å skaffe den matematiske kompetansen som er nødvendig for å opprettholde og utvikle et høyteknologisk samfunn. Programfagets egenart skal bidra til forståelse av matematikkens betydning i vår kultur og til utvikling av argumenterende, analyserende og utforskende ferdigheter. Programfaget har derfor både et nytteperspektiv og et dannelsesperspektiv i sitt formål.

Programfaget matematikk for realfag gir fordypning i matematikk for videre studier og arbeid innen naturvitenskap, medisin, teknologi, datafag, økonomi og utdanningssektoren. Gjennom trening av regneferdigheter, både med og uten digitale hjelpemidler, utvikles et grunnlag og en nødvendig kompetanse for videre arbeid med matematikk.

Arbeid med programfaget skal gi en innføring i logisk og analytisk tankegang med vekt på matematisk argumentasjon og framstillingsform, samtidig som elevene gjennom anvendelse får trening i sentrale metoder.

Hovedområder

Geometri

Hovedområdet handler om måling, regning og analyse av figurer i rommet. Videre dreier det seg om koordinater, likninger og vektorer som brukes til å bestemme figurer og beregne lengder, vinkler, areal og volum. I tillegg inngår tredimensjonale vektorer, skalar- og vektorprodukt og parameterframstilling.

Algebra

Hovedområdet handler om å analysere og regne på tallmønstre og på endelige og uendelige summer av tall. Grunnleggende teknikker i hovedområdet er rekursjon og induksjon. Videre dreier det seg om rekker, konvergens og induksjonsbevis.

Funksjoner

Hovedområdet handler om bruk av periodiske funksjoner til å modellere periodiske fenomener. Videre dreier det seg om derivasjon og integrasjon av sentrale funksjoner i modellering og beregninger. Sentrale funksjoner som inngår i hovedområdet, er polynomfunksjoner, potensfunksjoner, rasjonale funksjoner, logaritmefunksjoner, eksponentialfunksjoner, periodiske funksjoner og sammensetninger av dem.

Differensiallikninger

Hovedområdet handler om bruk av matematikk til å analysere og regne på dynamiske fenomener. I dette hovedområdet inngår standardmetoder for lineære og separable differensiallikninger som anvendes på praktiske problemer. I tillegg dreier det seg om sentrale begreper som initialbetingelser, retningsdiagrammer og integralkurver.

Kompetansemål

Geometri

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- utføre beregninger med tredimensjonale vektorer som er representert både geometrisk og på koordinatform
- bruke og tolke skalar- og vektorproduktet i beregning av avstander, vinkler, areal og volum
- bruke vektorregning til å finne liknings- og parameterframstillinger til linjer, plan og kuleflater
- beregne lengder, vinkler og arealer i legemer avgrenset av plan og kuleflater

Algebra

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- finne og analysere rekursive og eksplisitte formler for tallmønstre med og uten digitale hjelpemidler, og gjennomføre og presentere enkle bevis knyttet til disse formlene
- gjennomføre og gjøre rede for induksjonsbevis
- summere endelige rekker med og uten digitale hjelpemidler, utlede og bruke formlene for summen av de n første leddene i aritmetiske og geometriske rekker, og bruke dette til å løse praktiske problemer
- regne med uendelige geometriske rekker med konstante og variable kvotienter, bestemme konvergensområdet for disse rekkene og presentere resultatene

Funksjoner

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- forenkle og løse lineære og kvadratiske likninger i trigonometriske uttrykk ved å bruke sammenhenger mellom de trigonometriske funksjonene
- derivere sentrale funksjoner og bruke førstederiverte og andrederiverte til å drøfte slike funksjoner
- omforme trigonometriske uttrykk av typen $a \sin kx + b \cos kx$, og bruke dem til å modellere periodiske fenomener
- gjøre rede for definisjonen av bestemt integral som grense for en sum og ubestemt integral som antiderivert
- beregne integraler av de sentrale funksjonene ved antiderivasjon og ved hjelp av variabelskifte, ved delbrøkoppspalting med lineære nevnere og ved delvis integrasjon
- tolke det bestemte integralet i modeller av praktiske situasjoner og bruke det til å beregne arealer av plane områder og volumer av omdreiningslegemer
- formulere en matematisk modell ved hjelp av sentrale funksjoner på grunnlag av observerte data, bearbeide modellen og drøfte resultat og framgangsmåte

Differensiallikninger

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- modellere praktiske situasjoner ved å omforme problemstillingen til en differensiallikning, løse den og tolke resultatet
- løse lineære første ordens og separable differensiallikninger ved regning og gjøre rede for noen viktige bruksområder
- løse andre ordens homogene differensiallikninger og bruke Newtons andre lov til å beskrive frie svingninger ved periodiske funksjoner
- løse differensiallikninger og tegne retningsdiagrammer og integralkurver, og tolke dem ved å bruke digitale hjelpemidler

Fasit

Innlæringsoppgaver og kapitteltester

1.2 a 1, 3 og 2 b 4 , 0 og 1 c $(-5,2,4)$ $(-5,-2,4)$ $(-5,2,-4)$ $(-5,-2,-4)$ $(5,-2,-4)$ $(5,-2,4)$ $(5,2,-4)$ og $(5,2,4)$

1.3 a $OP=6$ b $OP=\sqrt{30}\approx 5{,}48$

1.4 a $PQ=5{,}92$ b $OP=6{,}63$ c $OP=3{,}16$

1.5 a $\overrightarrow{RS}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}-\vec{w})$ b $\overrightarrow{AR}+\frac{1}{2}\overrightarrow{RS}=\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})$
c $\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})$. Midtpunktet på RS faller sammen med midtpunktet på PQ.

1.6 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}\right)=\frac{1}{2}[x_1+x_2\,,\,y_1+y_2\,,\,z_1+z_2]$ $M=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\,,\,\frac{y_1+y_2}{2}\,,\,\frac{z_1+z_2}{2}\right)$

1.7 a $[0,1,-4]$ b $[-16,3,12]$

1.8 a $[4,0,3]$ 5 b $[-2,2,-5]$ $\sqrt{33}=5{,}74$ c $[7,-10,-1]$ $\sqrt{150}=12{,}25$

1.9 a 13 b $\sqrt{30}=5{,}48$ c $\pm 8{,}12$

1.10 a $s=2$ $t=9$ b $s=2{,}5$ $t=0$ c $s=4$ $t=-6$

1.11 a $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, altså vinkelrett b $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$, altså ikke vinkelrett

1.12 a $43{,}9°$ b $114{,}9°$ c $120°$

1.13 a $x=2 \wedge y=-1+t \wedge z=3+4t$ b $x=5+2t \wedge y=-4t \wedge z=-4+t$

1.14 a $x=1+3t \wedge y=-1 \wedge z=2+t$ b $x=5-3t \wedge y=-3+5t \wedge z=-2-t$

1.15 a Ikke parallelle $(4,-1,2)$ b Parallelle c Ikke parallelle, vindskeive

1.16 a $60{,}0°$ b $85{,}4°$ c $75{,}0°$

1.17 a $x=2+s+2t \wedge y=-3s-2t \wedge z=1+t$
b $x=1+5t \wedge y=4+4s-t \wedge z=1+6s+4t$
c $x=2+4s+3t \wedge y=1+s+2t \wedge z=4t$

1.18 a $[1,-2,7]$ b $[-1,-6,-3]$ c $[-8,6,-1]$ d $[-9,-7,-10]$
e $[13,6,11]$ f $[-8,2,-21]$

1.19 a $\vec{0}$ b $\vec{e}_z$ c $\vec{e}_x$ d $\vec{e}_y$ e $-\vec{e}_z$ f $-\vec{e}_x$

1.20 a $8\vec{e}_x-2\vec{e}_z$ b $[-5,-15,2]$

1.21 a 5 b 46,7

1.22 a 8,3 b 3,5 c 12,9

1.23 a 24 b 14 c 27

1.24 $\vec{v}\parallel\vec{w}$ og/eller $\vec{u}$ ligger i samme plan som $\vec{v}$ og $\vec{w}$ eller parallelt med dette

1.25 **a** 12 **b** 5,67 **c** 10,83

1.26 **a** Ikke i samme plan **b** I samme plan

1.27 **a** $x+5y-2z-17=0$ **b** $2x+5y-4z-24=0$ **c** $3x-z+54=0$

1.28 **a** $7x-y-12z=0$ **b** $x+y+5z-8=0$ **c** $4x-6y+3z-12=0$

1.29 **a** y-aksen **b** x-aksen **c** x- og z-aksen

1.30 I og IV, II og III

1.31 **a** $4{,}3°$ **b** $60{,}1°$

1.32 **a** $(2\,,0\,,1)$ **b** $\left(-\frac{11}{7}\,,-\frac{8}{7}\,,\frac{11}{7}\right)$ **c** Parallelle, ingen skjæringspunkt

1.33 **a** Ikke parallell **b** Parallell, utenfor planet

1.34 **a** $1{,}6°$ **b** $40{,}0°$ **c** $60{,}3°$

1.35 **a** $x=3t \;\wedge\; y=-2+t \;\wedge\; z=2-4t$ **b** $x=t \;\wedge\; y=-13-9t \;\wedge\; z=-8-5t$
c $x=0 \;\wedge\; y=1+2t \;\wedge\; z=2-t$

1.36 **a** $-5x+3y+4z+6=0$

1.37 **a** F.eks. $x=4+2s+t \;\wedge\; y=s \;\wedge\; z=t$ **b** F.eks. $x=3+3t \;\wedge\; y=s \;\wedge\; z=2t$

1.38 **a** $0{,}91$ **b** $0{,}46$

1.39 **a** $3{,}15$ **b** $2{,}40$

1.40 **a** $5{,}83$ **b** $1{,}96$

1.41 0,30

1.42 **a** $9{,}9$ m/s og $13{,}4$ m/s **b** 57 m

1.43 **a** $1{,}67$ **b** $1{,}67$ **c** $0{,}67$ **d** 3

1.44 **a** 2 **b** $1{,}70$ **c** $2{,}34$ **d** $2{,}06$

1.45 **a** $0{,}66$ **b** $1{,}26$

1.46 **a** $x^2+y^2+z^2=64$ **b** $(x+3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=4$

1.47 **a** Sentrum: $(-2\,,1\,,3)$ Radius: $r=5$ **b** Ingen kuleflate **c** Ingen kuleflate

1.48 **a** $32\pi=100{,}5$ **b** $36\pi=113{,}1$ **c** $2{,}5$

1.49 **a** $\frac{119}{6}=19{,}8$ **b** $61{,}2$ **c** $102{,}9°$ **d** $106{,}9°$

1.50 **a** $(0\,,0\,,0)$ $(1\,,0\,,0)$ $(0\,,0\,,2)$ $(1\,,-1\,,0)$
b $(1{,}6\,,0\,,0{,}8)$ **c** $\frac{2}{3}$

1.A **a** $[1\,,-2\,,-8]$ **b** $8{,}3$ **c** $(4\,,-2\,,-4)$ **d** $(0\,,2\,,0)$

1.B **a** $x=4+2s \;\wedge\; y=2+2s \;\wedge\; z=-1-s$ **b** $(0\,,8\,,0)$ Nei **c** $7{,}21$

1.C **a** $x=s+4t \;\wedge\; y=2-2s \;\wedge\; z=1+2s-2t$ **b** $2x+5y+4z-14=0$ **c** $6{,}7$
d Ikke i samme plan **e** 9

1.D **a** $58{,}2°$ **b** $x = 2t \wedge y = -4 + 6t \wedge z = 2 + 5t$ **c** 2

1.E **a** $(3\,,0\,,0)$ $(0\,,-6\,,0)$ og $(0\,,0\,,4)$ **b** $(4\,,2\,,0)$ **c** $2{,}8°$

1.F **a** $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 36$ **b** $S = (5\,,1\,,-1)\,,\ r = 7$ **c** $182\pi = 571{,}8$

1.G **a** $E = (5\,,5\,,4)\,,\ F = (4\,,-1\,,4)$ **b** $60{,}9°$ **c** $87{,}5°$ **d** 18
e $\left(\frac{218}{53}\,,\frac{-1}{53}\,,\frac{216}{53}\right) = (4{,}11\,,-0{,}019\,,4{,}08)$

2.1 **a** Legg til 4, neste ledd er 20. **b** Trekk fra 2, neste ledd er 2.
c Legg til 1, 2, 3, …, neste ledd er 16. **d** Multipliser med 4, neste ledd er 1024.
e Multipliser med -3, neste ledd er -243. **f** Legg til 3, 5, 7, … , neste ledd er 36.

2.2 **a** 6 **b** 4 **c** 5 **d** 2

2.3 **a** 10, 13, 16, 19, 22 **b** 1, 5, 25, 125, 625
c 2, 4, 10, 28, 82 **d** 4, 15, 46, 137, 408

2.4 **a** $a_n = a_{n-1} - 3$ **b** $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$ **c** $a_n = a_{n-1} + 3^{n-1}$
d $a_n = -2a_{n-1}$ **e** $a_n = a_{n-1} + 2n$ **f** $a_n = a_{n-1} + n - 1$

2.5 **a** 3, 4, 5, 6, 7 **b** 5, 9, 13, 17, 21 **c** $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, 2, 6, 18$

2.6 **a** $a_n = 2n$ **b** $a_n = 2(n-1)$ **c** $a_n = 2n - 1$
d $a_n = n^2 + n$ **e** $a_n = \frac{1}{n^2}$ **f** $a_n = (-2)^{n-1}$

2.7 **a** $a_n = 0{,}5n^2 + 2{,}5n - 2$ **b** $a_n = 2n^3 + 1$

2.8 **a** $a_n = 2^n$ **b** 62

2.9 **a** $3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23$ **b** $S_2 = 10$ $S_6 = 78$

2.10 **a** 1, 8, 27, 64, 125, … **b** $S_n = n^3$ **c** 10^6

2.11 **a** $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots$ **b** $S_n = n^2 + n$ **c** 15 252

2.12 **a** 10^4 **b** 343 400 **c** $2{,}13 \cdot 10^{13}$

2.13 **a** $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ **b** $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ **c** $26 + 62 + 122 = 210$

2.14 **a** $\sum_{n=1}^{50} 2n = 2550$ **b** $\sum_{n=5}^{50} 2n = 2530$ **c** $\sum_{n=1}^{10} n^3 = 3025$

2.15 **a** $d = 2$ $a_n = a_{n-1} + 2$ **b** Ikke aritmetisk
c $d = -0{,}5$ $a_n = a_{n-1} - 0{,}5$ **d** $d = 0$ $a_n = a_{n-1} = 5$

2.16 **a** $10 + 14 + 18 + 22 + 26$ **b** $6 + 10 + 14 + 18 + 22$
c $10 + 6 + 2 - 2 - 6$ **d** $-1 + 0 + 1 + 2 + 3$

2.17 **a** $a_n = 5 + 3n$ **b** $a_n = 13 - n$ **c** $a_n = 2n - 1$ **d** $a_n = 40 - 7n$

2.18 **a** $a_n = 3 + 4n$ $7 + 11 + 15 + 19 + 23$ **b** $a_n = 20n - 177$ $-157 - 137 - 117 - 97 - 77$

2.19 **a** 1700 **b** 535 **c** 265 **d** 145 **e** 295 **f** 50

2.20 **a** 341 **b** -7

2.21 **b** September **c** 1840

Fasit

Oppgavesamling

101 **a** På z-aksen **b** x- og z-koordinatene må være lik null

102 **a** $OP = \sqrt{13} = 3{,}61$, $OQ = \sqrt{14} = 3{,}87$, $PQ = \sqrt{27} = 5{,}20$
b Ja, den er rettvinklet

103 **a** 3 , 5 **b** 13 , $\sqrt{129} = 11{,}4$ **c** $\sqrt{160} = 12{,}6$, $\sqrt{104} = 10{,}2$

104 **a** $\overrightarrow{OD} = \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{OE} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{OF} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OG} = \vec{a} + \vec{c}$

105 $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$

106 **a** $\overrightarrow{OP} = \vec{a} - \vec{u}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OR} = \vec{a} - \vec{u} + \vec{v}$, $\overrightarrow{OS} = \vec{a} - \vec{u} + \vec{w}$ **b** $\vec{a} - \vec{u}$

107 **a** $\overrightarrow{OA} = [2,0,0]$, $\overrightarrow{OB} = [2,4,0]$ **b** $\overrightarrow{CG} = [0,0,3]$, $\overrightarrow{FE} = [0,-4,0]$
c $\overrightarrow{CD} = [0,-4,3]$, $\overrightarrow{AG} = [-2,4,3]$

108 **a** $[8,-2,-2]$ **b** $[2,-4,-9]$ **c** $[4,-1,4]$ **d** $[-6,3,3]$ **e** $[3,-12,9]$
f $[-5,7,12]$

109 **a** $[-4,2,0]$ **b** $(3,-9,2)$ **c** $(3,2,-1)$ **d** $[-4t+2, t+1, 3t-1]$

110 **a** $[7 , 0 , 0]$ **b** $[10 , 5 , -10]$ **c** $[18 , -12 , 36]$

111 $s = 3$, $t = 2$

112 **a** $64{,}9°$

113 $\angle CAB = 68{,}5°$, $\angle ABC = 68{,}5°$ og $\angle BCA = 43{,}0°$

114 **a** A og B, C og D **b** A og D , B og E **c** A og E , B og D

115 **a** 4,47 **b** 4,47 eller 6,70 **c** 4,24

117 $t = -\dfrac{1}{3}$

118 **a** $t \in \{0 , -3\}$ **b** $a = -2$, $b = 5$, $c = -4$
c F.eks. $[3,2,0]$, $[5,0,-2]$ og $[0,5,3]$ **d** $t = \dfrac{4}{3}$

119 Likhet hvis $\vec{u} \times \vec{v}$ har samme retning

120 **a** $79{,}5°$ **b** $68{,}6°$ **c** $24{,}1°$ **d** 1

121 $x = 3 + 2t \quad \wedge \quad y = -1 + t \quad \wedge \quad z = 2 - t$

122 **a** F.eks. $(2 , -1 , 11)$, $[4 , -1 , 2]$ **b** F.eks. $(5 , -1 , 0)$, $[0 , 3 , 15]$

123 **a** $x = 4t \quad \wedge \quad y = -2 + t \quad \wedge \quad z = 2$ **b** $x = 1 + 4s \quad \wedge \quad y = 1 + s \quad \wedge \quad z = 2$

124 **b** Ja, de ligger på rett linje **c** Nei, de ligger ikke på rett linje

125 **a** $(1, 0, 2)$ **b** F.eks. $[1, 2, -1]$ og $[4, -1, 1]$ **c** Ja, punktet ligger i planet

126 **a** $x = 2s + 4t \wedge y = t \wedge z = 5s + 7t$ **b** $x = 2 + 2s + 2t \quad \wedge \quad y = s + 4t \quad \wedge \quad z = 5 + 2s + 2t$
c $x = -1 + s + 6t \wedge y = 4 - 3s - 8t \wedge z = -3 - s + 6t$

127 **a** $(0, 8, 0)$ **b** $(12, 0, -4)$ **c** $(0, 8, 0)$

128 $(6, -9, 12)$ og $(-2, 7, -4)$

129 **b** 59,0° **c** Ingen skjæringspunkter, vindskeive linjer.

130 **a** $x = 1 + 4s + 5t \quad \wedge \quad y = -s + t \quad \wedge \quad z = 3 + s - 2t$

131 $[-1, 3, 2] \parallel [2, -6, -4]$

132 **a** $[-2, 1, 2]$ **b** $[-1, -7, 5]$ **c** $[7, 16, -6]$

133 **a** $\vec{u} \times \vec{v}$ ligger i xy-planet. Da er $\vec{u} \times \vec{v}$ parallell med z-aksen **b** $[0, 0, ad - bc]$

134 **a** $5\vec{e}_x + 11\vec{e}_y - 19\vec{e}_z$ **b** $-10\vec{e}_x + 19\vec{e}_y + 26\vec{e}_z$

135 **a** $D = (-5, -1, 10)$, 21,42

136 **a** 9,53 **b** 7,65 **c** $\dfrac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{2}$

137 **a** Begge har lengde 1 **c** $[0, 0, \sin\alpha]$

139 **a** $\dfrac{|\overrightarrow{AB}| \cdot D}{2}$ og $\dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}|}{2}$ **c** 8,03

141 **a** $AB = BC = CD = DA = 3$ **b** $6\sqrt{2} = 8{,}49$

142 $\dfrac{|abc|}{6}$

143 **a** Grunnflaten må være et parallellogram. $ABCD$ er et parallellogram. **b** 50,67

144 **a** 9,45 **b** 12 **c** 3,81

145 **a** 76 **b** 86,95

146 **a** Nei **b** Ja

147 **a** $[1, -2, 1]$ **b** F. eks. $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u} = [0, 1, 2]$

148 $[3, -2, 1]$ og $[9, -6, 3]$. Planene er parallelle og sammenfallende.

149 **a** $3x + y + 2z - 7 = 0$ **b** $3y - 2z - 24 = 0$ **c** $12x - 8y + 6z - 50 = 0$

150 $x - 2y + 5z - 17 = 0$

151 **a** $4x - 5y - z - 8 = 0$ **b** $35x - 19y + z + 121 = 0$

152 **a** $4x - y + z = 0$ **b** $x - 2y + 2z - 5 = 0$

153 **a** $x = 0$ **b** $y = -6 \vee y = 6$ **c** $x + y + z - 2 = 0$

154 $z - 3 = 0$

155 **a** $y + 2z - 4 = 0$ **b** $3y + 4z = 0$ **c** $26x + 33y - 34z - 172 = 0$ **d** $2x - y = 0$

156 **a** $y + z = 0$ **b** $7x - y + 5z - 27 = 0$

157 **c** $90°$

158 **a** $19{,}5°$ **b** $59{,}0°$

159 **a** $x + y - z - 3 = 0$ **b** $x + y - z - 3 = 0$

160 **a** På to plan som er parallelle med det gitte planet
b $x + 2y + 2z - 27 = 0$ eller $x + 2y + 2z + 9 = 0$

161 $11{,}3°$

162 **b** $y + \sqrt{3}z = 0$ eller $y - \sqrt{3}z = 0$

163 **a** De står vinkelrett på hverandre. **b** Nei **c** Ja

164 **a** $x = t \wedge y = -1 \wedge z = 2 - t$ **b** Ja **c** $\left(\frac{8}{3}, -1, \frac{2}{3}\right)$

165 **c** $x = 2t \wedge y = 9 - 7t \wedge z = 5 - 3t$

166 **a** $0° \le \alpha \le 90°$ **b** $61{,}0°$ **c** $8{,}9°$ **d** $9{,}7°$

167 **a** Ja, linja ligger i planet.

168 **a** $x = t \wedge y = 3 - t \wedge z = -2 + t$ **b** $x + 4y + 3z - 8 = 0$

169 **a** $x = 1 - 2t \wedge y = 2 - 3t \wedge z = t$ **b** $(-1, 1, 1)$ **c** $(3, 2, 0)$

170 **a** $(1, -2, 2)$ $[1, 4, 2]$ **b** $\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-2} = z - 2$ **c** $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-1}$

171 **a** $x = 2,\ y = 0{,}8,\ z = -3{,}4$

172 **a** $4{,}06$

173 **a** $x = 4 - 2t \wedge y = 2 - 3t \wedge z = -3 + t$ **b** $x = -2t \wedge y = 2 - 3t \wedge z = 1 + t$ **c** $4{,}66$

174 **a** 2 **b** 5 **c** $\frac{2}{3}$

175 **a** $d = 39 \vee d = -33$

176 **a** 4 **b** $4,\ 3{,}58,\ 4$

177 **b** $[1, 2, 2]$, 3 **c** $\frac{13}{3} = 4{,}33$

178 **a** $\overrightarrow{PQ} = [-3 - 4t - 2s,\ 2 - t + 2s,\ -1 + t + 3s]$ **b** $t = \frac{-2}{5} = -0{,}4,\quad s = \frac{-1}{5} = -0{,}2$
c 3, avstanden mellom l og m

179 **a** $x = at \wedge y = bt \wedge z = ct$ **b** $\left(\dfrac{-ad}{a^2+b^2+c^2}, \dfrac{-bd}{a^2+b^2+c^2}, \dfrac{-cd}{a^2+b^2+c^2}\right)$
c $\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

180 **a** $x + 7y + 5z - 1 = 0$ **b** $0{,}23$

181 3,86

182 **a** 559 km, 559 km/h **b** $t = 1{,}75$, $(937{,}5\,,-157\,,4)$
c 17,1 km **d** 30,5 km

183 **a** $x^2 + y^2 + z^2 = 64$ **b** $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 16$
c $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 36$

184 **a** $(2\,,-1\,,-4)$, 5b $(-1\,,6\,,-8)$, 10 **c** $(-3\,,\dfrac{1}{2}\,,7)$, $\dfrac{\sqrt{241}}{2} = 7{,}76$

185 17,35

186 **a** 137,5 **b** 24

187 **a** Kuleflate med sentrum i origo og radius 8 **b** 6
c $\sqrt{28} = 5{,}29$, $(4\,,4\,,-2)$

188 **a** $(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 9$ **b** **c** $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 676$

189 **a** $(0\,,0\,,0)$, $(0\,,0\,,1)$, $(0\,,-4\,,0)$, $(2\,,0\,,0)$ **b** $\dfrac{4}{3} = 1{,}33$ **c** 4,58, 29,2°

190 **a** $\overrightarrow{AB} = [2\,,5\,,-3]$ $\overrightarrow{AC} = [0\,,1\,,3]$ **b** $x = 5 - 2t \wedge y = 4 - 4t \wedge z = -1 + 6t$
c $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [18\,,-6\,,2]$ 9,54 **d** $9x - 3y + z - 32 = 0$
e $9x - 3y + z - 132 = 0$ eller $9x - 3y + z + 68 = 0$

191 **a** $(2\,,-2\,,4)$, 5 **b** $k = 7 \vee k = -11$

192 **b** 60° **d** 109,5°

193 **a** $x = 4 \wedge y = 3 \wedge z = t$ **b** $(4\,,3\,,\dfrac{9}{4})$ **c** $3x + 4z - 18 = 0$
d 36,9° **e** 93,7°

194 **a** $6x + 3y + 2z - 30 = 0$, $\dfrac{30}{7} = 4{,}29$ **b** $x^2 + y^2 + z^2 = 25$
c $\dfrac{350}{49} + \dfrac{325}{49} = \dfrac{375}{49} = 43{,}28$

195 **a** $D = (2\,,5\,,1)$, $E = (-1\,,1\,,1)$ **b** 30,50 **c** 125,3°
d $x + z - 3 = 0$ **e** 45°

196 **a** 32,6° **b** 14,5° **c** $\dfrac{1}{6}$

197 **a** $Q = (1\,,-3\,,3)$, $P = (5\,,9\,,0)$ **b** 13 **c** $\dfrac{848\pi}{13} = 204{,}9$

198 **b** 90° **c** 24, 20 og 15 **d** $\sqrt{1201} = 34{,}7$

199 **a** Ja **c** $(-5\,,7\,,7)$

X1.1 **b** $[8\,,6\,,3]$ **c** 2,30

X1.2 a $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ **b** $(1\,,2\,,-1)$ 3 **c** $(0\,,4\,,-3)$

X1.3 a $\overrightarrow{AB}=[-a,b,0]$, $\overrightarrow{AC}=[-a,0,c]$ **c** $bcx+cay+abz-abc=0$

X1.4 a $C=(0\,,3\,,0)$, $E=(2\,,0\,,5)$, $F=(2\,,3\,,5)$
b $|\overrightarrow{CE}|=\sqrt{38}=6{,}16$ $ECF=29{,}1°$
c $x=2t \ \wedge\ y=3-3t \ \wedge\ z=5t$ **d** Ja, de skjærer hverandre
e $2x-3y+5z=0$ **f** $\dfrac{9}{\sqrt{38}}=1{,}46$

X1.5 a 3, $(0\,,3)$ og 10, $(14\,,10)$ **b** $\sqrt{245}+13=28{,}7$

X1.6 a $32{,}5°$ **b** $x+4y-3z-5=0$ **c** $\dfrac{13}{3}=4{,}33$ **d** $\left(0\,,0\,,-\dfrac{31}{3}\right)$

X1.7 a $53{,}3°$ **c** $2x+y-z-3=0$ **d** $k=\ln\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}=-0{,}36$ eller $k=\ln\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}=1{,}46$
e $\dfrac{13}{4\sqrt{14}}=0{,}869$

X1.8 a $\dfrac{9}{\sqrt{6}}=3{,}67$ **b** $R=(0\,,2\,,5)$ **d** $\left(\dfrac{1}{2}\,,1\,,\dfrac{9}{2}\right)$
e Punkter på linja $x=t \ \wedge\ y=1+t \ \wedge\ z=4-t$

201 a 28 , 36 **b** Metoden virker ikke. **c** 86 , 127 **d** 140 , 204
e Metoden virker ikke. **f** 24 579 , 45 930

202 a 38 **b** 25 **c** 30 **d** 500 006

203 a 340 **b** 27 **c** 37 **d** 58

204 a

A	B	C	D	E
	17	18	19	20
24	23	22	21	
	25	26	27	28

b Legg til 6 og 2 annenhver gang 3999 **c** Kolonne A, rad 250

205 a Hvert tall (unntatt de ytterste ett-tallene) er summen av de to nærmeste nabotallene i raden over.
b
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

c 4851

206 a $7^2=49$, $67^2=4489$, $667^2=444\,889$, $6667^2=44\,448\,889$
b $7\cdot 9=63$, $77\cdot 99=7623$, $777\cdot 999=776\,223$
$7\,777\,777\,777\cdot 9\,999\,999\,999=77\,777\,777\,76\,222\,222\,222\,3$

207 a 7,9,11,13,15,17 $a_n=a_{n-1}+2$ **b** 2,7,12,17,22,27 $a_n=a_{n-1}+5$