

R2 - Trigonometri - 03.01.13

Løsningsskisser

I

Gjør om vinklene til absolutt vinkelmål (radianer): a) 72° b) -115°

$$\text{a) } 72^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} 72^\circ = \frac{2\pi}{5} \quad \text{b) } -115^\circ = -\frac{\pi}{180^\circ} 115^\circ = -\frac{23\pi}{36}$$

II

Gjør om vinklene til grader: a) $\frac{\pi}{8}$ b) -2

$$\text{a) } \frac{\pi}{8} = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{\pi}{8} = 22.5^\circ \quad \text{b) } -2 = -\frac{180^\circ}{\pi} 2 = \frac{360^\circ}{\pi} \approx 115^\circ$$

III

Løs ligningene ved regning:

a) $4 \cos x + 3 = 0, \quad x \in [0^\circ, 360^\circ)$

$$\begin{aligned} \cos x = -\frac{3}{4} &\Leftrightarrow x = 138.6^\circ + k360^\circ \vee x = 360^\circ - 138.6^\circ + k360^\circ \Leftrightarrow \\ x &= 138.6^\circ + k360^\circ \vee x = 221.4^\circ + k360^\circ \\ L &= \{139^\circ, 221^\circ\} \end{aligned}$$

b) $2 \cos^2 x + 7 \cos x - 4 = 0, \quad x \in [0^\circ, 360^\circ)$

$$\begin{aligned} 2u^2 + 7u - 4 = 0, \quad u = \cos x &\Leftrightarrow u = -4 \vee u = \frac{1}{2} \\ \cos x = -4 \text{ (Umulig)} &\vee \cos x = \frac{1}{2} \\ x = 60^\circ + k360^\circ &\vee x = 360^\circ - 60^\circ + k360^\circ \\ L &= \{60^\circ, 300^\circ\} \end{aligned}$$

c) $2 \sin^2 x - 7 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 0, \quad x \in [0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} \cos x = 0 &\text{ gir ingen løsning.} \\ \cos x \neq 0 &\text{ gir, etter divisjon med } \cos^2 x: \\ 2 \tan^2 x - 7 \tan x - 4 = 0 &\Leftrightarrow 2u^2 - 7u - 4 = 0, \quad u = \tan x \\ u = -\frac{1}{2} &\vee u = 4 \\ \tan x = -\frac{1}{2} &\vee \tan x = 4 \\ x = -0.464 + k\pi &\vee x = 1.33 + k\pi \\ L &= \{1.33, 2.68, 4.47, 5.82\} \end{aligned}$$

d) $2 \cos x \tan x + \tan x = 0, \quad x \in [0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} \text{Faktoriserer: } \tan x(2 \cos x + 1) = 0 &\Leftrightarrow \tan x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2} \\ x = 0 + k\pi &\vee x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \vee x = 2\pi - \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = 0 + k\pi &\vee x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{aligned}$$

$$L = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}\right\} \quad (\approx \{0, 2.09, 3.14, 4.19\})$$

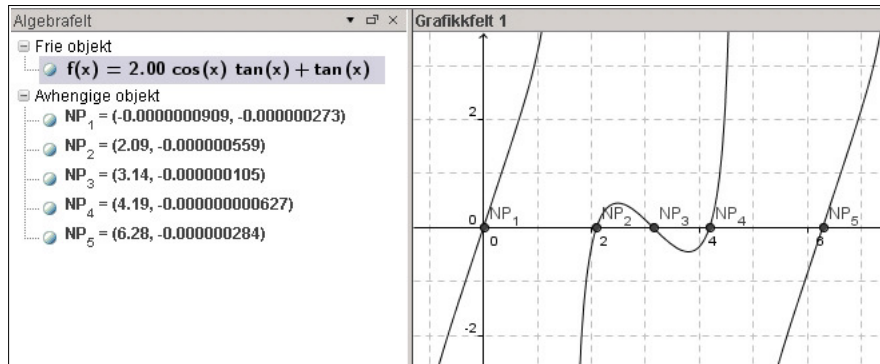
Illustrerer hvordan vi kan sjekke svar med GeoGebra:

Kommandoene:

$$f(x) = 2 \cdot \cos(x) \cdot \tan(x) + \tan(x)$$

$$NP = \text{NullpunktIntervall}[f, -1, 7]$$

gir oss:



(Hvis Nullpunktintervall[...] ikke fungerer ordentlig, kan man finne ett og ett nullpunkt med eksempelvis $NP_2 = \text{Nullpunkt}[f, 1, 3]$)

IV

Gitt funksjonen: $f(x) = 3 - \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

a) Skriv om funksjonen til formen $L + A \sin(kx - \varphi)$ og finn amplituden, likevektslinjen, perioden og faseforskyvningen.

$$f(x) = 3 + (-\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right))$$

$$f(x) = 3 + (\sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \varphi\right)), \quad \tan \varphi = 1, \varphi \in 3 \text{ Kvadrant}$$

$$f(x) = 3 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi}{4}\right)$$

(Kan også gjøre:

$$f(x) = 3 - (\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)) = 3 - 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$$

som er samme funksjon.)

b) Finn funksjonens nullpunkter ved regning.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \text{Umulig, ingen nullpunkter.}$$

c) Finn funksjonens ekstremalpunkter og vendepunkter ved regning.

Formen $L + A \sin(kx - \varphi)$ gir oss ekstremal- og vendepunkter uten derivasjon, nok å se på $\sin(\dots)$ - delen av uttrykket:

Toppunkter:

$$f_{\max} = 3 + 2 \cdot 1 = 5 \quad \text{når} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + n2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} + n4$$

$$): \quad TP_1 = \left(\frac{5}{2}, 5\right), \quad TP_2 = \left(\frac{13}{2}, 5\right)$$

$$\text{Dessuten endepunktet: } (0, f(0)) = (0, 2 - \sqrt{2}) \approx (0, 0.586)$$

Bunnpunkter:

$$f_{\min} = 3 + 2(-1) = 1 \quad \text{når} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + n2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + n4$$

$$): \quad BP_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad BP_2 = \left(\frac{9}{2}, 1\right)$$

Vendepunkter:

$$f_{vp} = 3 + 2 \cdot 0 = 3 \quad (\text{Kryssninger med likevektslinje.})$$

når

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi}{4} = 0 + n2\pi \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{5}{2} + n4$$

$$): \quad VP_1 = \left(\frac{3}{2}, 3\right), \quad VP_2 = \left(\frac{7}{2}, 3\right), \quad VP_3 = \left(\frac{11}{2}, 3\right)$$

V

En funksjon på formen $f(x) = L + A \sin(kx + \varphi)$ har et toppunkt i $(2, 5)$.
 Det første bunnpunktet etter dette toppunktet ligger i $(4, 1)$.
 Finn funksjonsuttrykket til $f(x)$.

Amplitude: $A = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{2} = \frac{5 - 1}{2} = 2$

Likevektslinje: $L = \frac{f_{\max} + f_{\min}}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$

Periode:

Avstand mellom to ekstremalpunkter er halve perioden,

så:

$$\frac{P}{2} = 4 - 2 \Leftrightarrow P = 4 \Rightarrow$$

$$k = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Så langt har vi: $f(x) = 3 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \varphi\right)$

Vi bestemmer faseforskyvningen ved å bruke det første punktet, toppunktet:

$$f(2) = 5 \Leftrightarrow 3 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2 + \varphi\right) = 5 \Leftrightarrow \sin(\pi + \varphi) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\pi + \varphi = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

Velger den enkleste verdien når $k = 0$, og får da:

$$f(x) = 3 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$$

(eller $f(x) = 3 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}(x - 1)\right)$)