R2 - Trigonometri - 10.11.14

Selv om vi ikke brukte GeoGebra på prøven, har jeg antydet hvordan vi kan bruke GeoGebra til å kontrollere svar. Gjør det til en vane å kontrollere svar med GeoGebra når dere regner oppgaver hjemme, så får dere trent på både regning og GeoGebra-bruk samtidig!

I

a) Gjør om vinkelen $x = 12^\circ$ til absolutt vinkelmål (radianer).

b) Gjør om vinkelen $x = -3$ [rad] til grader.

a) $\pi \frac{12^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{15} \approx 0.209$

b) $180^\circ \frac{-3}{\pi} \approx -172^\circ$

II

Løs ligningene ved regning:

a) $\sqrt{3}\tan(x) - 1 = 0, \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$

$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$): $L = \{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\}$

b) $\sqrt{3}\tan(3x+1) - 1 = 0, \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$

$\tan(3x+1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow (3x+1) = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi-6}{6} + k\pi \Leftrightarrow$
$x = \frac{\pi-6}{18} + k\frac{\pi}{3}$

): $L = \{\frac{7\pi-6}{18}, \frac{13\pi-6}{18}, \frac{19\pi-6}{18}, \frac{25\pi-6}{18}, \frac{31\pi-6}{18}, \frac{37\pi-6}{18}\}$ ($k = 1,2,3,4,5,6$)

Eller: $L \approx \{0.888,\ 1.94,\ 2.98,\ 4.03,\ 5.08,\ 6.12\}$

Kontroll i GeoGebra:

f(x):=sqrt(3) tan(3 x+1)-1
Graftegnerdel, numerisk:
NullpunktIntervall[f,0,7] gir A=(0.888,0), B=(1.94,0), ...
CAS, eksakt:
f(x)=0 og $\boxed{\text{x=}}$ gir: $\{x = \frac{6k\pi+\pi-6}{18}\}$
f(x)=0 og $\boxed{\text{x≈}}$ gir: $\{8.22\}$ som tilsvarer k=8 i uttrykket over...

c) $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0, \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$

$2u^2 + 3u - 2 = 0, \qquad u = \sin x$
$u = -2 \vee u = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = -2$ (Umulig)$\vee \sin x = \frac{1}{2}$
$x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + l2\pi$
): $L = \{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$

Kontroll i GeoGebra CAS:
f(x):=2 (sin(x)) ^2 +3 sin(x)-2
f(x)=0 og $\boxed{\text{x=}}$ gir: $\{ x = 2k\pi + \frac{1}{6}\pi, x = 2k\pi + \frac{5}{6}\pi\}$

d) $\cos x \tan x - \cos x = 0, \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$

Prøv alltid faktorisering først! Ikke gjør ting vanskeligere enn de er ved å gå rett på alle mulige avanserte teknikker, før man har prøvd faktorisering!

$\cos x(\tan x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \tan x = 1 \Leftrightarrow$
$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

): $\quad L = \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\}$

Kontroll med GeoGebra CAS:
f(x):=cos(x) tan(x)-cos(x)
f(x)=0 og $\boxed{\text{x=}}$ gir: $\{x = 2k\pi + \frac{1}{4}\pi, x = 2k\pi - \frac{3}{4}\pi\}$

III

Gitt funksjonen $f(x) = 2 + \sin(3x) + \sqrt{3}\cos(3x), \quad x \in x \in [0, 2\pi\rangle$

a) Skriv funksjonen på formen $f(x) = L + A\sin(cx + \varphi)$.

b) Finn funksjonens nullpunkter, ekstremalpunkter og vendepunkter.

a) $\sin(3x) + \sqrt{3}\cos(3x)$
$= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}\sin(3x + \varphi), \tan\varphi = \sqrt{3}, \varphi \in 1$ Kvadrant
$= 2\sin(3x + \frac{\pi}{3})$

): $f(x) = 2 + 2\sin(3x + \frac{\pi}{3}) = 2 + 2\sin(3(x + \frac{\pi}{9}))$

b)
Nullpunkter:
$2 + 2\sin(3x + \frac{\pi}{3}) = 0 \Leftrightarrow \sin(3x + \frac{\pi}{3}) = -1 \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow$
$x = \frac{7\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$
): $\quad (\frac{7\pi}{18}, 0), (\frac{19\pi}{18}, 0), (\frac{31\pi}{18}, 0)$ (Eller: $(1.22, 0), (3.32, 0), (5.41, 0)$)

Ekstremalpunkter når: $\quad \sin(3x + \frac{\pi}{3}) = \pm 1$

Topp-punkter: $3x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$
): $\quad (\frac{\pi}{18}, 4), (\frac{13\pi}{18}, 4), (\frac{25\pi}{18}, 4)$ (Eller: $(0.175, 4), (2.27, 4), (4.36, 4)$)

Bunn-punkter når: $\quad 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$
): $\quad (0, 2 + \sqrt{3}), (\frac{7\pi}{18}, 0), (\frac{19\pi}{18}, 0), (\frac{31\pi}{18}, 0)$
(Eller: $(0, 3.73), 1.22, 0), (3.32, 0), (5.41, 0)$)
Som null-punkter bortsett fra *endepunkte*t $(0, 2 + \sqrt{3})$! Ikke glem endepunkter!

Vendepunkter når: $\quad \sin(3x + \frac{\pi}{3}) = 0 \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{3} = 0 + k\pi \Leftrightarrow$
$x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}$

): $\quad (\frac{2\pi}{9}, 2),\ (\frac{5\pi}{9}, 2),\ (\frac{8\pi}{9}, 2),\ (\frac{11\pi}{9}, 2),\ (\frac{14\pi}{9}, 2),\ (\frac{17\pi}{9}, 2)$

(Eller: $(0.698, 2),\ (1.75, 2),\ (2.79, 2),\ (3.84, 2),\ (4.89, 2),\ (5.93, 2)$)

Kontroll med GeoGebra:

f(x):=2+sin(3 x)+sqrt(3) cos(3 x)

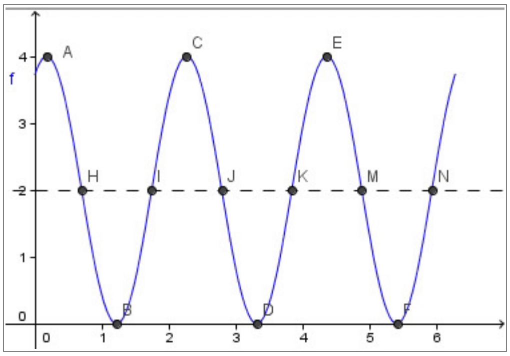
Graftegneren viser hvor mange null-, ekstremal- og vendepunkter man kan vente seg.

f(x)=0, f'(x)=0, f''(x)=0 og $\boxed{\text{x=}}$ eller $\boxed{\text{x≈}}$ gir

x-koordinatene til null-, ekstremal- og vendepunkter.

Eller numerisk:

Ekstremalpunkt[f,0,7]
g(x)=2 (Likevektslinje)
Skjæring[f,g,0,7] (Greieste måte å finne vendepunkt på.)
NullpunktIntervall[f,0,7] fungerer ikke, da tangeringspunktene ikke regnes som skjæringspunkter i GeoGebra. (Noen land definerer nullpunkt annerledes...)



IV

Vi har en funksjon $f(x) = L + A\sin(cx + \varphi)$, $\quad x \in [0, 16]$
Laveste verdi av $f(x)$ i definisjonsmengden er 5.
$f(x)$ har ett topp-punkt $(11, 13)$ i definisjonsmengden.
Funksjonen har periode $T = 16$.
Bestem funksjonsuttrykket til $f(x)$.

Likevektslinje: $\quad L = \frac{\text{max+min}}{2} = \frac{13+5}{2} = 9$
Amplitude: $\quad A = \frac{\text{max-min}}{2} = \frac{13-5}{2} = 4$

Periode: $\quad T = 16 \Rightarrow c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$

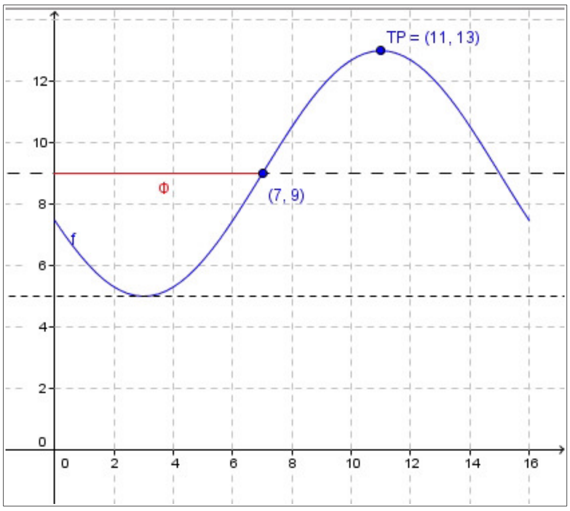
$f(x)$ krysser likevektslinje på vei oppover $\frac{T}{4}$ før første topp-punkt $(11, 13)$,
det vil si $x = 11 - \frac{16}{4} = 7$
altså har vi faseforskyving $\phi = -7$ og $\varphi = c\phi = -\frac{7\pi}{8}$

): $\quad f(x) = 9 + 4\sin(\frac{\pi}{8}(x - 7)) = 9 + 4\sin(\frac{\pi}{8}x - \frac{7\pi}{8})$

(Eller: $f(x) = 9 + 4\sin(0.393x - 2.75)$)

Kontroll i GeoGebra:

f(x):=9+4 sin(pi/8 (x-7))
Slå på rutenett i graftegneren, så ser vi at det stemmer med oppgavens opplysninger:



V

Vinkelen x ligger i 3dje kvadrant og $\cos x = -\frac{1}{2}$.
Finn eksakte verdier for $\sin x, \tan x$ og $\cos 2x$.

$$\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x} \qquad \text{(Positiv mulighet forkastes.)}$$
$$= -\sqrt{1-(\tfrac{1}{2})^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2(-\tfrac{1}{2})^2 - 1 = -\frac{1}{2}$$

(Kan også gjøres ved å tegne inn en rettvinklet trekant med sidene $1, \sqrt{3}$ og 2 og vinklene $30^\circ, 60^\circ$ og 90° i 3dje kvadrant og plukke ut verdiene direkte fra figuren.)