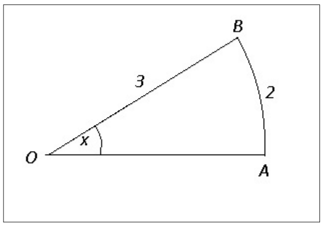
R2 - K3: Trigonometri - 16.12.11

Løsningsskisser

I

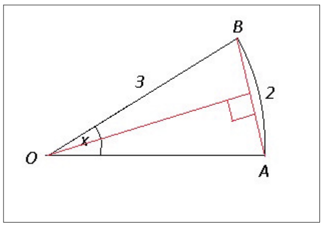


Figuren viser en sirkelsektor der lengden av buen er 2 og radien i tilhørende sirkel er 3.
a) Bestem vinkelen x i radianer.
b) Bestem vinkelen x i grader.
c) Bestem lengden av korden AB. (Det rette linjestykket mellom A og B.)

a)
Vinkeldefinisjon: $x = \frac{b}{r} = \frac{2}{3} \approx 0.667$

b)
I grader: $\quad x = \frac{2}{3}\frac{180^\circ}{\pi} \approx 38.2^\circ$

c)
Trekker vi ned en normal på korden får vi figuren:



Korde: $k = AB$ gir:
$\sin\frac{x}{2} = \frac{\frac{k}{2}}{r} = \frac{k}{2r} \Leftrightarrow k = 2r\sin\frac{x}{2} = 2\cdot 3\cdot\sin(\frac{2}{3\cdot 2}) \approx 1.96$

II

Løs ligningene:
a) $2\sin x + 3 = 8\sin x,\ x \in [0, 2\pi\rangle$ b) $2\sin^2 x + \sin x = 0,\ x \in [0, 2\pi\rangle$
c) $\sin x - \cos^2 x = 1,\ x \in [0, 2\pi\rangle$

a) $6\sin x = 3 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow$
$L = \{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$

b) $2\sin x(\sin x + \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$x = 0 + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \pi - (-\frac{\pi}{6}) + k2\pi \Leftrightarrow$
$L = \{0, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$

c) $\sin x - (1 - \sin^2 x) = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$\sin x = -2$ (umulig) $\vee \sin x = 1$
$L = \{\frac{\pi}{2}\}$

III

Gitt funksjonen: $f(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x - \sqrt{2}$, $\qquad D_f = [0, 2\pi\rangle$
a) Skriv $f(x)$ på formen $f(x) = a\sin(bx + c) + d$.
b) Finn nullpunktene til $f(x)$.
c) Finn ekstremalpunktene til $f(x)$.

a) $f(x) = -\sqrt{3}\sin x + \cos x - \sqrt{2} =$
$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}\sin(x + \varphi) - \sqrt{2}$, $\qquad \tan\varphi = \frac{1}{-\sqrt{3}}, \varphi \in 2$ KV
$= 2\sin(x + \frac{5\pi}{6}) - \sqrt{2} = 2\sin(x + \frac{5\pi}{6}) - \sqrt{2}$

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(x + \frac{5\pi}{6}) - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{5\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$
$x + \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee x + \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow$
$x = -\frac{7\pi}{12} + k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$

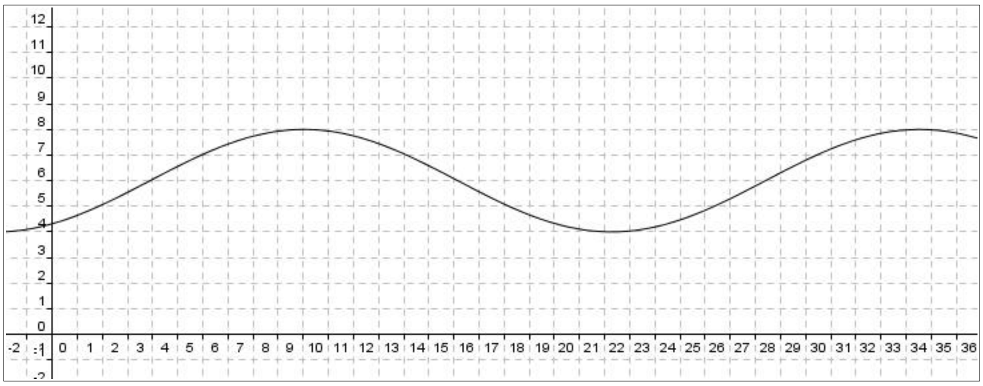
$NP: (\frac{17\pi}{12}, 0), (\frac{23\pi}{12}) \qquad \approx (4.45, 0), (6.02, 0)$

c) Topp-punkt:
Maksverdi: $2 \cdot 1 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$
Når: $\qquad x + \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$
): $(\frac{5\pi}{3}, 2 - \sqrt{2}) \qquad \approx (5.24, 0.586)$

Bunn-punkt:
Minverdi: $2 \cdot (-1) - \sqrt{2} = -2 - \sqrt{2}$
Når: $\qquad x + \frac{5\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$
): $(\frac{2\pi}{3}, -2 - \sqrt{2}) \approx (2.09, -3.41)$

Dessuten endepunktet, som er et topp-punkt:
$(0, f(0)) = (0, 1 - \sqrt{2}) \approx (0, -0.414)$

IV



a) Finn likevektslinjen, amplituden og perioden til funksjonen som er grafet i figuren.
b) Finn funksjonsuttrykket, på formen $a\sin(bx + c) + d)$, ved regning.
c) Bruk lommeregneren til å finne funksjonsuttrykket ved å bruke målepunktene $(6, 7.03), (10, 8), (14, 7.05), (18, 5.08)$ og $(22, 4)$.
d) Finn vendepunktene til funksjonen i området $[0, 25\rangle$ ved regning.

a) Avleser fra graf: $\quad maks = 8, \quad min = 4$

Likevektslinje: $d = \frac{maks+min}{2} = \frac{8+4}{2} = 6$

Amplitude: $\quad a = \frac{maks-min}{2} = \frac{8-4}{2} = 2$

Avstand mellom to maksimum gir periode: $T = 34.5 - 10 = 24.5$

b) $c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24.5} \approx 0.256$

Grafer vi likevekstlinjen får vi første skjæring med graf for $x = 4$.
Faseforskjellen blir derfor 4 og vi har:

$f(x) = 2\sin(0.256(x - 4)) + 6 = 2\sin(0.256x - 1.02) + 6$

c) Legger $6, 10, 14, 18$ og 22 i L1 og $7.03, 8, 7.05, 5.08$ og 4 i L2.
STAT, CALC, SinReg L1, L2, Y1 gir da funksjonen:

$f(x) = 2.00\sin(0.256x - 0.998) + 6.00$

d) Vendepunktene på en sinusfunksjon ligger midt mellom ekstremalpunktene, og også på likevektslinjen, med avstanden $\frac{T}{2} = 12.25$ mellom seg, så likevektslinjen gir oss vendepunktene:

$(4, 6)$ og $(16.25, 6)$