R2 - Trigonometri - 17.11.2016

Del I - Uten andre hjelpemidler enn lommeregner

Oppgave 1

Gjør om vinklene til radianer: a) 18° b) 33° (*Regn eksakt!*)

a) $18^\circ = \pi \frac{18^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{10}$ b) $33^\circ = \pi \frac{33^\circ}{180^\circ} = \frac{11\pi}{60}$

Oppgave 2

Gjør om vinklene til grader: a) $\frac{\pi}{16}$ b) -9 (*Regn eksakt!*)

a) $\frac{\pi}{16} = \frac{180^\circ\pi}{\pi 16} = \frac{180^\circ}{16} = \frac{45^\circ}{4}$ (11.25°)

b) $-9 = \frac{180^\circ(-9)}{\pi} = -\frac{1620^\circ}{\pi}$ $(\approx -516^\circ)$

Oppgave 3

Løs ligningene ved regning, regn eksakt så langt det går:

a) $2\cos x - \sqrt{2} = 0, \ x \in [0, 2\pi\rangle$ b) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0, \ x \in [0, 2\pi\rangle$

c) $\tan x \cos x - \cos x = 0, \ x \in [0, 2\pi\rangle$ d) $\cos^2 x + 3\sin x \cos x + 1 = 0, \ x \in [0, 2\pi\rangle$

a) $2\cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee x = 2\pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi$

$L = \{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$

b) $2u^2 + u - 1 = 0, u = \cos x \Leftrightarrow u = -1 \vee u = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = -1 \vee \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
$x = \pi + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = 2\pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi$

$L = \{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\}$

c) $\tan x \cos x - \cos x = 0,$ $\cos x \neq 0$ ($\tan x$ ikke definert når $\cos x = 0$!)

$\cos x(\tan x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ (Forkastes!) $\vee \tan x = 1$

(Alternativt: $\frac{\sin x}{\cos x} \cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1$)

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$L = \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$

Viktig å skille mellom:
Forutsetning som gjelder i utgangspunktet. (Som i denne oppgaven.)
Forutsetning vi må ta i en omforming. (Som i neste oppgave.)

d) $\cos^2 x + 3\sin x \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x + 3\sin x \cos x + (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow$
$\sin^2 x + 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$

$\cos x \neq 0$: (cos $x = 0$ gir ingen løsning)

$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} + 2\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x + 3\tan x + 2 = 0 \Leftrightarrow$
$u^2 + 3u + 2 = 0, u = \tan x \Leftrightarrow \tan x = -2 \vee \tan x = -1 \Leftrightarrow$
$x \approx 2.03 + k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

$L = \{2.03, \frac{3\pi}{4}, 5.17, \frac{7\pi}{4}\}$

Oppgave 4

En funksjon på formen $f(x) = L + A\sin(cx + \varphi)$ har et toppunkt i $(1,3)$.
Det første bunnpunktet etter toppunktet ligger i $(5,-1)$.

a) Finn funksjonsuttrykket til $f(x)$.

b) Finn nullpunktene til $f(x)$ i intervallet $[0,4]$.

a) Likevektslinje: $L = \frac{\max+\min}{2} = \frac{3+(-1)}{2} = 1$
Amplitude: $A = \frac{\max-\min}{2} = \frac{3-(-1)}{2} = 2$
Periode/bølgelengde:
Avstand mellom toppunkt og bunnpunkt er $\frac{\lambda}{2}$:
$\frac{\lambda}{2} = 5 - 1 \Leftrightarrow \lambda = 8$
$c = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

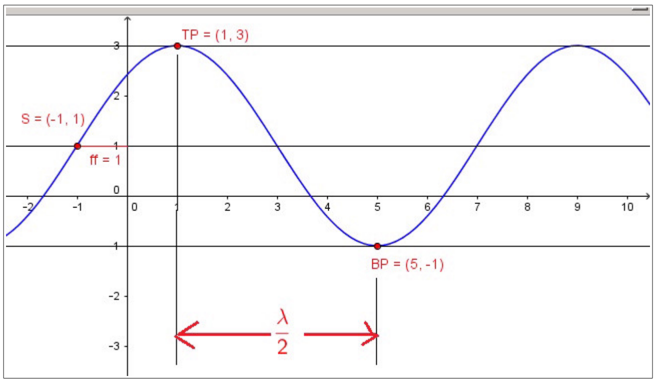
): $f(x) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{4}x + \varphi)$

Første skjæringspunkt med likevektslinjen ligger en kvart bølgelengde før toppunktet i $(1,3)$: $x = 1 - \frac{\lambda}{4} = 1 - \frac{8}{4} = -1$

Faseforskyvningen er derfor 1 til venstre, slik at faseforskyvningen blir *ff* = 1, som gir oss:

$f(x) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{4}(x+1)) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4})$

(Alternativt kan vi tenke oss faseforskyvning 7 enheter mot høyre, og får i så fall: $f(x) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{4}(x-7)) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{4}x - \frac{7\pi}{4})$)



b) Nullpunkt for: $1 + 2\sin(\frac{\pi}{4}(x+1) = 0 \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{4}(x+1)) \; = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$
$\frac{\pi}{4}(x+1) = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \vee \frac{\pi}{4}(x+1) = \frac{11\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow$
$x = \frac{11}{3} + k2\pi \vee x = \frac{19}{3} + k2\pi$

): Nullpunkt i $[0,4]$ er $\frac{11}{3} \approx 3.67$

Oppgave 5

Vinkelen x ligger i 3dje kvadrant og $\tan x = \frac{4}{3}$.

a) Vis at $\sin x = -\frac{4}{5}$. b) Finn eksakte verdier for $\cos x$, $\tan x$ og $\tan(2x)$.

a) Vi kan lage en trekant med kateter lik 3 og 4.
Phytagoras gir da hypotenus: $\sqrt{3^2+4^2} \; = 5$
Ut fra trekanten og med fortegnskorrigering for 3dje kvadrant får vi:
$\sin x = -\frac{4}{5}$

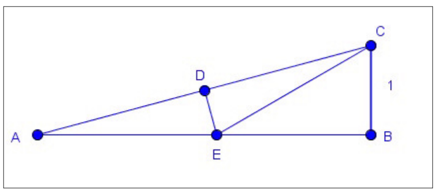
Har også formelen: $\sin x = \pm\frac{\tan x}{\sqrt{\tan^2 x+1}} = \pm\frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{(\frac{4}{3})^2+1}} = -\frac{4}{5}$
(Forkaster positivt fortegn pga. plassering i kvadrant 3.)

b) $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} \; = \pm\sqrt{1-(-\frac{4}{5})^2} \; = -\frac{3}{5}$ (Forkaster + i tredje kvadrant.)
$\tan x$ allerede regnet ut, trykkfeil...

$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2\cdot\frac{4}{3}}{1-(\frac{4}{3})^2} = -\frac{24}{7}$

Oppgave 6

Gitt trekanten ABC, der $\angle A = 15^\circ$, $\angle B = 90^\circ$ og $BC = 1$.
I tillegg er : $\angle BEC = 30^\circ$ og $\angle ADE = 90^\circ$



a) Forklar hvorfor $AE = EC = 2$.

b) Bruk trekanten til å vise at $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$.
(Hint: Du trenger: $4 \pm 2\sqrt{3} = 3 \pm 2\sqrt{3} + 1 = \sqrt{3}^2 \pm 2\sqrt{3} + 1^2 = (\sqrt{3} \pm 1)^2$)

a) $\angle BCE = 60^\circ$ (Vinkelsum 180° i ΔEBC)
$\angle BCD = 75^\circ$ (Vinkelsum 180° i ΔABC)
$\angle ECD = \angle BCD - \angle BCE = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$
Som igjen er lik vinkel A!

$\Delta AED = \Delta CED$:
-DE felles side
-Begge rettvinklede da $\angle ADE = 90^\circ$
-$\angle ECD = \angle A$

$\sin \angle BEC = \frac{BC}{EC} \Rightarrow EC = \frac{BC}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Da $\Delta AED = \Delta CED$, må $AE = EC$

): $AE = EC = 2$ *QED*

b) $\cos \angle BEC = \frac{BE}{EC} \Rightarrow BE = EC \cos \angle BEC = 2\cos 30^\circ = \sqrt{3}$

$AB = AE + EB = 2 + \sqrt{3}$

Pythagoras gir:
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 4\sqrt{3} + 3 + 1} =$
$\sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{2(4 + 2\sqrt{3})} =$ (For å benytte hintet i oppgaven!)
$\sqrt{2(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$

$\sin 15^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = \frac{1(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}(3-1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} =$
$\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$ *QED*

Del II - Med hjelpemidler

Oppgave 7

Temperaturen et sted i Norge varierte gjennom et døgn som en sinusfunksjon
$T(t) = L + A\sin(ct + \varphi)$ $[^\circ C]$, $t \in [0, 24]$ [timer]

Temperaturen kl. 24:00 ($t = 0$) var 18°. Utover natten sank temperaturen til minimumstemperaturen 10.8°.
Maksimumstemperaturen dette døgnet var 19.2°.

a) Finn et uttrykk for funksjonen $T(t)$.

b) Finn ut på hvilke tidspunkter vi hadde miminums- og maksimumstemperaturer.

a) $L = \frac{\max + \min}{2} = \frac{19.2 + 10.8}{2} = 15.0$

$A = \frac{\max - \min}{2} = \frac{19.2 - 10.8}{2} = 4.20$

Periode $T = 24$ [timer]   (Indirekte gitt i oppgaven, kan ikke være noe annet...)

$c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12} = 0.262$

Så langt: $T(t) = 15.0 + 4.20\sin(0.262t + \varphi)$

Vinkelen φ finner vi ved å bruke betingelsen: $T(0) = 18$

$15.0 + 4.20\sin(0.262 \cdot 0 + \varphi) = 18 \Leftrightarrow$
$\sin(\varphi) = 0.71429$
$\varphi = 0.796 + k2\pi \vee \varphi = \pi - 0.796 = 2.35 + k2\pi$

(Inntasting av $\sin(\varphi) = 0.71429$ og  i CAS gir $\{\varphi = 0.796, \varphi = 2.35\}$)

Ved å tegne grafen ser vi at vi må bruke $\varphi = 2.35$ for å få temperaturen til å synke utover natten:

$T(t) = 15.0 + 4.2\sin(0.262t + 2.35)$

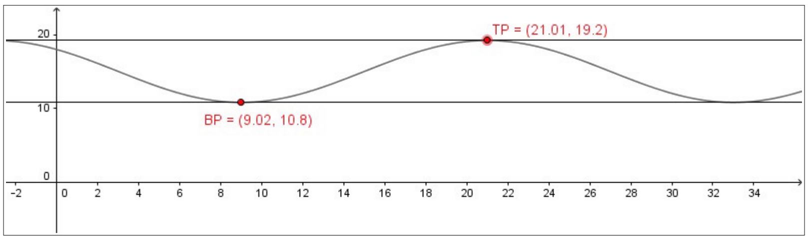
(Alternativt kunne vi brukt $15.0 - 4.20\sin(\pi - (0.262t + 2.35)) =$
$15.0 - 4.20\sin(-0.262t + 0.796)$, men
vi liker å ha positivt fortegn både foran amplituden 4.20 og t-leddet
$0.262t$...)

b) Ekstremalpunkter når $0.262t + 2.35 = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow$
$t = \frac{\frac{\pi}{2} - 2.35}{0.262} + k\frac{\pi}{0.262} = -2.97 + k12$

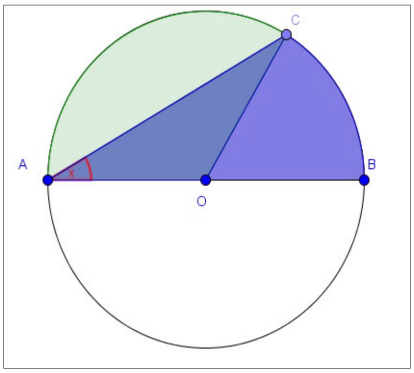
Bunnpunkt for $t = -2.97 + 12 = 9.03$): ca. kl. 09:02

Toppunkt for $t = -2.97 + 2 \cdot 12 = 21.03$):ca. kl. 21:02

Kan også bruke kommandoen **Ekstremalpunkt[T,0,24]** i grafisk del av GGB for å finne topp- og bunnpunkter.



Oppgave 8



Figuren over viser en sirkel med diameter AB og radius r.
Et punkt C flytter seg på sirkelen avhengig av vinkelen $x = \angle OAC$ som er uavhengig variabel.
Det markerte grønne området er et sirkelsegment S.
Det markerte blå området er summen av en trekant AOC og en sirkelsektor med bue BC.

a) Forklar og vis at sirkelsegmentet S har arealet

$$S(x) = r^2(\tfrac{\pi}{2} - x - \sin x \cos x), \quad \text{der } x \in [0, \pi\rangle \,.$$

b) Bestem x slik at det grønne sirkelsegmentet S blir like stort som det blå arealet.

a) Vinkelsummen i ΔAOC gir $v = \angle AOC = \pi - 2x$

Arealet av sirkelsektoren AOC:

$$S_1 = \frac{br}{2} = \frac{(vr)r}{2} = \frac{r^2}{2}v = \frac{r^2}{2}(\pi - 2x) = r^2(\tfrac{\pi}{2} - x)$$

Arealet av trekant ΔAOC:

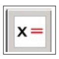
$$T = \frac{gh}{2} = \frac{AC \cdot h}{2} = \frac{2AO\cos x \cdot AO\sin x}{2} = AO^2 \sin x \cos x = r^2 \sin x \cos x$$

$$S(x) = S_1 - T = r^2(\tfrac{\pi}{2} - x) - r^2 \sin x \cos x = r^2(\tfrac{\pi}{2} - x - \sin x \cos x) \qquad QED$$

b) I CAS:

S(x):=r^2(pi/2-x-sin(x) cos(x))

S(x)=pi r ^2/4 (Hvis grønn og blå like store er de en fjerdedel av en sirkel!)

 gir da: **Løs: {x=0.416, x=2.00 k$_2$ $\pi + \pi$ }**

$x \in [0, \pi\rangle$ krever at løsningen blir $x = 0.416$ (ca. 24°)

(Litt mer tungvindt: $S = T + \text{sektor}BOC \Leftrightarrow$

$$r^2(\tfrac{\pi}{2} - x - \sin x \cos x) = r^2 \sin x \cos x + \frac{(2x)r \cdot r}{2} \Leftrightarrow$$

$$\tfrac{\pi}{2} - x - \sin x \cos x = \sin x \cos x + x \Leftrightarrow$$

$$x + \sin x \cos x = \tfrac{\pi}{4}$$ som løses i CAS

Dette er samme ligning som kommer ut av den første løsningen:

$$r^2(\tfrac{\pi}{2} - x - \sin x \cos x) = \tfrac{\pi}{4}r^2 \Leftrightarrow$$

$$\tfrac{\pi}{2} - x - \sin x \cos x = \tfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$x + \sin x \cos x = \tfrac{\pi}{4}$$
