Løsningsskisser til oppgaver i 1.1 - Vektorer i rommet

Oppgaver:

106, 110, 111, 115, 116, 117, 118, 119, 120

106

Teknikk: Finne posisjonsvektorer: ***"Gå fra Origo til punktet du skal finne posisjonen til, langs kjente vektorer"***

a) Innskuddssetningen:

$\overrightarrow{OQ} = \vec{a}$
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \vec{a} + (-\vec{u}) = \vec{a} - \vec{u}$
$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QR} = \vec{a} + (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{a} - \vec{u} + \vec{v}$
$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QS} = \vec{a} + (\vec{w} - \vec{u}) = \vec{a} - \vec{u} + \vec{w}$

b)

Forskyvning, eksempelvis $\overrightarrow{OP} = \vec{a} - \vec{u}$ (se a)

110

c) Vektor med samme retning som $\vec{u}$: $\vec{v} = k\vec{u}$

Lengde: $|\vec{v}| = |k\vec{u}| = |k[3,-2,6]| = k\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = 7k$

Lik q: $7k = q \Leftrightarrow k = \frac{42}{7} = 6$

): $\vec{v} = 6\vec{u} = 6[3,-2,6] = [18,-12,36]$

Kan lage oss en generell formel for å lage en vektor med gitt lengde (q) og retning($\vec{u}$) :

Vektor med lengde 1 og samme retning som $\vec{u}$ (enhetsvektor): $\vec{e}_u = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$

Vektor med lengde q blir da $q\vec{e}_u$, slik at den søkte vektoren blir:

$$\vec{v} = \frac{q}{|\vec{u}|}\vec{u}$$

Sjekk:

$$\vec{v} = \frac{q}{|\vec{u}|}\vec{u} = \frac{42}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}}[3,-2,6] = [18,-12,36]$$

111

Teknikk: Løse vektorligning: I rommet gir en vektorligning (bare vektorer) 3 ligninger, og vi kan derfor finne opp til 3 ukjente!

$[7,-1,4] = [1,0,2] + s[2,-3,0] + t[0,4,1]$

$7 = 1 + 2s \wedge -1 = -3s + 4t \wedge 4 = 2 + t$
$s = 3 \wedge -1 = -1 \wedge t = 2$
$L = \{(3,2)\}$

115

c) Teknikk: Finne minste avstand mellom to punkter gitt med en parameter

$\overrightarrow{PQ} = [t-4-t, 2t-(t+2), t+1-(2t-3)] \ = [-4, t-2, -t+4]$

a) Samme z-koordinat, altså: $2t-3 = t+1 \Leftrightarrow t = 4$

$\overrightarrow{PQ} = [-4, 4-2, -4+4] = [-4, 2, 0] \Rightarrow \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5} \approx 4.47$

b) Samme eller motsatt y-koordinat, altså:

$t+2 = 2t \vee t+2 = -2t$

$t = 2 \vee t = -\frac{2}{3}$

Videre som i a)...

c) Avstanden er: $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{4^2+(t-2)^2+(-t+4)^2} = \sqrt{2t^2-12t+36} = \sqrt{f(t)}$, der $f(t) = 2t^2-12t+36$

Lurest å bruke $f(t)$ på uttrykket inne i rottegnet, når det er minimum, er også avstanden (med rottegn) minimum!

$f'(t) = 4t-12$, minimum når $4t-12 = 0 \Leftrightarrow t = 3$

$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{2\cdot 3^2-12\cdot 3+36} = 3\sqrt{2} \approx 4.24$

116

Teknikk: Undersøke om tre punkter ligger på linje

P, Q og R på linje $\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{QR}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \vec{v} - \vec{u}$

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = (4\vec{v} - 3\vec{u}) - \vec{v} = 3\vec{v} - 3\vec{u}$

$\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{QR} \Leftrightarrow \vec{v} - \vec{u} = k(3\vec{v} - 3\vec{u}) \Leftrightarrow (-1+3k)\vec{u} + (1-3k)\vec{v} = 0 \Leftrightarrow -1+3k = 0 \wedge 1-3k$

QED

117

Teknikk: Undersøke om to vektorer står normalt på hverandre

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow [2,2,5]\cdot[t,2,2t] = 0 \Leftrightarrow 2t+4+10t = 0 \Leftrightarrow 12t+4 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$

118

Bruk teknikken i 117...

119

Etter kvadrering:

$HS = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|$

$VS = |\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$ (med cosinus-setningen)

Her vil $\cos\alpha$ variere mellom -1 og 1, uansett er alltid *VS* mindre eller like *HS*, *QED*

120

a) $\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{e_x}}{|\vec{v}||\vec{e_x}|} = \frac{[1,2,5]\cdot[1,0,0]}{\sqrt{1^2+2^2+5^2}\cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{30}} \Rightarrow \alpha = 79.5^\circ$

b) $\cos\beta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{e_y}}{|\vec{v}||\vec{e_y}|} = \frac{[1,2,5]\cdot[0,1,0]}{\sqrt{1^2+2^2+5^2}\cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{30}} \Rightarrow \beta = 68.6^\circ$

c) $\cos\gamma = \frac{\vec{v}\cdot\vec{e_z}}{|\vec{v}||\vec{e_z}|} = \frac{[1,2,5]\cdot[0,0,1]}{\sqrt{1^2+2^2+5^2}\cdot 1} = \frac{5}{\sqrt{30}} \Rightarrow \gamma = 24.1^\circ$

d) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = (\frac{1}{\sqrt{30}})^2 + (\frac{2}{\sqrt{30}})^2 + (\frac{5}{\sqrt{30}})^2 =$

$\frac{30}{30} = 1$

e)

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = (\frac{\vec{v}\cdot\vec{e_x}}{|\vec{v}|})^2 + (\frac{\vec{v}\cdot\vec{e_y}}{|\vec{v}|})^2 + (\frac{\vec{v}\cdot\vec{e_z}}{|\vec{v}|})^2 =$

$\frac{(|\vec{v}|1\cos\alpha)^2}{|\vec{v}|^2} + \frac{(|\vec{v}|1\cos\beta)^2}{|\vec{v}|^2} + \frac{(|\vec{v}|1\cos\gamma)^2}{|\vec{v}|^2} =$

$\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{|\vec{v}|^2} = \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{v}|^2} = 1,\ QED$

($|\vec{v}|1\cos\alpha$) er prosjeksjonen av $\vec{v}$ på x-aksen, altså x-komponenten til $\vec{v}$: v_x, osv.)