Løsningsskisser til oppgaver i kapittel 1.1 og 1.2

124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131
136, 137, 138, 139, 140, 145, 146, 147

124

"Standard-metode":

P, Q og R på linje: $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{QR} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{QR}$

eller: Vise at: $\angle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR} = 0^\circ$ med skalarprodukt. (Tungvindt...)

Kan også gjøres med vektorprodukt: $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR} = \vec{0}$ (Egentlig enklest!)
(da $\sin 0^\circ = 0$!)

b)

$\overrightarrow{PQ} = [-3, 4, -4]$ $\quad\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{41}$

$\overrightarrow{QR} = [-6, 8, -8] = 2[-3, 4, -4]$ $\quad\left|\overrightarrow{QR}\right| = 2\sqrt{41}$

Ser direkte at $\overrightarrow{QR} = 2[-3, 4, -4] = 2\overrightarrow{PQ}$, altså er de parallelle.

Med regning (bare for å illustrere metode):

$\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{QR} \Leftrightarrow [-3, 4, -4] = k[-6, 8, -8] \Leftrightarrow$
$-3 = -6k \wedge 4 = 8k \wedge -4 = -8k \Leftrightarrow$
$k = \frac{1}{2}$ (entydig løsning, altså parallelle)

Med skalarprodukt: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|\left|\overrightarrow{QR}\right|} = \dfrac{18+32+32}{2\sqrt{41}\sqrt{41}} = \dfrac{82}{2 \cdot 41} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0^\circ$

Med vektorprodukt: $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR} = [-3, 4, -4] \times [-6, 8, -8] = [0, 0, 0]$

125

$$\left\{ \begin{aligned} x &= 1 + s + 4t \\ y &= 0 + 2s - t \\ z &= 2 - s + t \end{aligned} \right\}$$

a)
Da dette uttrykker: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\vec{r_1} + t\vec{r_2}$
er punktet vi går til først: $A = (1, 0, 2)$

b)
Retningsvektorene er selvfølgelig parallelle med planet:

$\vec{r_1} = [1, 2, -1]$
$\vec{r_2} = [4, -1, 1]$

c)
Hvis C skal ligge i planet må Cs koordinater stemme i ligningen:
$6 = 1 + s + 4t \wedge 1 = 2s - t \wedge 2 = -s + t$
$5 = s + 4t \wedge 1 = 2s - t \wedge s = t$
$5 = t + 4t \wedge 1 = 2t - t \wedge s = t$
$t = 1 \wedge t = 1 \wedge s = t$
Entydig løsning, altså er C i planet.

126

a) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO} + s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$

$[x,y,z] = [0,0,0] + s[2,0,5] + t[4,1,7] \Leftrightarrow$

$$\begin{Bmatrix} x = 2s + 4t \\ y = t \\ z = 5s + 7t \end{Bmatrix}$$

127

a)
Skjæringspunktet S må ha $z = 0$

Da får vi: $0 = -2 + t \Leftrightarrow t = 2$

Som gir: $x = 6 - 3 \cdot 2 = 0$ og $y = 4 + 2 \cdot 2 = 8$

$S = (0,8,0)$

128

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + t\vec{v} \Leftrightarrow$
$[x,y,z] = [2,-1,4] + t[1,-2,2]$

De to puktene gitt av at vi starter i P og går 12 lengdeenheter hver vei.

$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$

t –verdien til de to punktene altså bestemt av: $\frac{12}{|\vec{v}|} = \frac{12}{3} = 4$

$\overrightarrow{OP_1} = [2,-1,4] + 4[1,-2,2] = [6,-9,12] \Leftrightarrow P_1 = (6,-9,12)$
$\overrightarrow{OP_2} = [2,-1,4] - 4[1,-2,2] = [-2,7,-4] \Leftrightarrow P_2 = (-2,7,-4)$

129

a) $\vec{r_l} = [4,1,-1]$ $\vec{r_m} = [-2,2,3]$

$\vec{r_l} \parallel \vec{r_m} \Leftrightarrow \vec{r_l} = k\vec{r_m} \Leftrightarrow 4 = -2k \wedge 1 = 2k \wedge -1 = 3k \Leftrightarrow$
$k = -2 \wedge k = -\frac{1}{2} \wedge k = -\frac{1}{3}$
Selvmotsigelse, altså ikke parallelle.

Eller med vektorprodukt: $\vec{r_l} \times \vec{r_m} = [4, 1, -1] \times [-2, 2, 3] = [5, -10, 10]$
Forskjellig fra null-vektor, altså ikke parallelle.

b)

Skalarprodukt, gidder ikke...

c) Skjæringspunkter hvis:
$4t + 1 = -2s - 2 \wedge t - 1 = 2s + 1 \wedge -t + 1 = 2s \Leftrightarrow$
$4(1 - 2s) + 1 = -2s - 2 \wedge (1 - 2s) - 1 = 2s + 1 \wedge t = 1 - 2s \Leftrightarrow$
$4 - 8s + 1 = -2s - 2 \wedge -2s = 2s + 1 \wedge t = 1 - 2s$
$6s = 7 \wedge 4s = -1 \Leftrightarrow$
$s = \frac{7}{6} \wedge s = -\frac{1}{4}$
Selvmotsigelse, ikke skjæringspunkt, altså vindskjeve.

130

Planet inneholder l :
$\vec{r_l}$ i plan!
$t = 0$ gir et punkt på l, som også ligger i planet: $A = (1, 0, 3)$
Parallelt med m : $\vec{r_m}$ kan parallellforskyves ned i planet!

Har da: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\vec{r_m} + t\vec{r_l} \Leftrightarrow$
$[x, y, z] = [1, 0, 3] + s[4, -1, 1] + t[5, 1, -2]$

$$\left\{ \begin{array}{c} x = 1 + 4s + 5t \\ y = -s + t \\ z = 3 + s - 2t \end{array} \right\}$$

131

$$\left\{ \begin{array}{c} x = 1 - s + 2t \\ y = 5 + 3s - 6t \\ z = 2s - 4t \end{array} \right\}$$ Altså retningsvektorer: $\vec{r_1} = [-1, 3, 2]$ og $\vec{r_2} = [2, -6, -4] = -2[1, 3, 2]$

Retningsvektorene har altså samme retning, og kan derfor ikke definere et plan.
Vi kunne skrevet om til:

$$\left\{ \begin{array}{c} x = 1 - (s - 2t) \\ y = 5 + 3(s - 2t) \\ z = 2(s - 2t) \end{array} \right\} \text{ eller } \left\{ \begin{array}{c} x = 1 - u \\ y = 3u \\ z = 2u \end{array} \right\}$$ ved å bytte til en ny parameter $u = s - 2t$

Vi har derfor egentlig bare en parameter og derfor en linje, ikke et plan!

136

a) $Areal = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{26 \cdot 14 - 1^2} = \frac{11\sqrt{3}}{2} = 9.53$

b) $\overrightarrow{AB} = [3, 2, -2]$ og $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = 3^2 + 2^2 + 2^2 = 17$
$\overrightarrow{AC} = [2, -3, -1]$ og $\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = 2^2 + 3^2 + 1^2 = 14$

$Areal = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{17 \cdot 14 - 2^2} = \frac{3\sqrt{26}}{2} = 7.65$

c) $\overrightarrow{AB} = [-a, b, 0]$ og $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = a^2 + b^2$

$\overrightarrow{AC} = [-a, 0, c]$ og $\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = a^2 + c^2$

$Areal = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} =$

$\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2) - (a^2)^2} =$

$\sqrt{a^4 + b^2a^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - a^4} =$

$\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$

137

$\vec{u} = [1, 0, 0]$ $\vec{v} = [\cos\alpha, \sin\alpha, 0]$

a)

$\left|\vec{u}\right| = 1$ $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$

b)

Hvis vi tegner opp en figur ser vi at begge ligger i xy –planet, henholdsvis langs x-aksen og som hypotenus i en trekant med $\cos\alpha, \sin\alpha$ og 1 som kateter og hypotenus.
Ser da direkte at vinkelen er α.

Med regning: $\cos\beta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{\cos\alpha}{1 \cdot 1} = \cos\alpha$

Samme cosinus, altså samme vinkel.

c) Etter definisjon: $\vec{u} \times \vec{v} = [0, 0, \sin\alpha]$ (Med formel)

Lengden er altså: $\sin\alpha$.

d) Etter definisjon: $\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \sin\alpha = 1 \cdot 1 \cdot \sin\alpha = \sin\alpha$

(Eller: $\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \sqrt{\left|\vec{u}\right|^2\left|\vec{v}\right|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2} =$

$\sqrt{1^2 1^2 - (\cos\alpha)^2} = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sin\alpha$)

138

$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ betyr at de danner en lukket trekant!

Arealet av trekanten kan da uttrykkes på tre måter:

$\frac{1}{2}\left|\vec{u} \times -\vec{w}\right| = -\frac{1}{2}\left|\vec{u} \times \vec{w}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{w} \times \vec{u}\right|$

$\frac{1}{2}\left|\vec{v} \times -\vec{u}\right| = -\frac{1}{2}\left|\vec{v} \times \vec{u}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|$

$\frac{1}{2}\left|-\vec{w} \times \vec{v}\right| = -\frac{1}{2}\left|\vec{w} \times \vec{v}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{v} \times \vec{w}\right|$

Altså er $\frac{1}{2}\left|\vec{v} \times \vec{w}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{w} \times \vec{u}\right|$ eller

$\left|\vec{v} \times \vec{w}\right| = \left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \left|\vec{w} \times \vec{u}\right|$

Da vektorproduktene har også samme retning, da de må stå normalt på det planet trekanten ligger i,
og da jeg har satt dem opp i henhold til høyrehåndsregelen.

Samme retning og størrelse, altså like vektorer.

139

Setter $d = D$, liker best små bokstaver på lengder og store på punkt...

a) Areal:

Med vektorprodukt: $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}\right|$

Med trekantformel: $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right| d$ (grunnlinje•høyde/2)

b) $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right| d \Leftrightarrow d = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$

c)

$\overrightarrow{AB} = [-2, 1, 5], \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = 30$

$\overrightarrow{AP} = [-4, -5, 3], \qquad \left|\overrightarrow{AP}\right|^2 = 50$

$d = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\sqrt{30 \cdot 50 - 18^2}}{\sqrt{30}} = 6.26$

eller: $\frac{|[28, -14, 14]|}{\sqrt{30}} = \frac{|14[2, -1, -1]|}{\sqrt{30}} = \frac{14\sqrt{6}}{\sqrt{5 \cdot 6}} = \frac{14}{\sqrt{5}} = 6.26$

(Hmm...Feil i fasit?)

140

Her er formelen jeg mener det er viktig å kunne:

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$

eller som kvadrater:

$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

Ut fra definisjon:

$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = (|\vec{u}||\vec{v}| \sin\alpha)^2 = (|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \sin^2\alpha =$

$|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 (1 - \cos^2\alpha) = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \cos^2\alpha =$

$|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

145

a)

$\vec{u} \times \vec{v} = [4, -1, 1] \times [1, 2, -3] = [1, 13, 9]$

$Volum = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = [1, 13, 9] \cdot [2, 5, 1] = 76$

b)

$Volum = bredde \cdot lengde \cdot høyde = |\vec{u}||\vec{v}||\vec{w}| =$

$\sqrt{18}\sqrt{14}\sqrt{30} = 3\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{7}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5} = 6\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{7} = 87.0$

146

a)

Alternativt:
Tre av punktene, A, B og C, definerer et plan, gitt av parameterfremstillingen:
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$
$[x, y, z] = [1, -1, 1] + s[3, 2, 2] + t[2, 1, 3]$

Hvis punktet D også skal ligge i samme plan må Ds koordinater passe i ligningen:
$[2, 2, 5] = [1, -1, 1] + s[3, 2, 2] + t[2, 1, 3] \Leftrightarrow$
$2 = -1 + 3s + 2t \wedge 2 = -1 + 2s + t \wedge 5 = 1 + 2s + 3t$
$3 = 3s + 2t \wedge t = 3 - 2s \wedge 4 = 2s + 3t$
$3 = 3s + 2(3 - 2s) \wedge t = 3 - 2s \wedge 4 = 2s + 3(3 - 2s)$
$3 = s \wedge t = 3 - 2s \wedge s = \frac{5}{4}$
Selvmotsigelse, altså ikke i samme plan.

147

a) $\vec{u} \times \vec{v} = [1, 1, 1] \times [1, 2, 3] = [1, -2, 1]$

b) $|\vec{u} \times \vec{v}|$ er arealet av et parallellogram utspendt av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Hvis vi holder $\vec{u}$ fast, kan vi bytte ut $\vec{v}$ med en $\vec{w}$ og få samme areal,
bare høyden i parallellogrammet er lik, altså når:
$\vec{w} = k\vec{u} + \vec{v}$

Da går vi: $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{u} \times (k\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \times k\vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} = k\vec{u} \times \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} = 0 + \vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v}$

Med oppgitte tall:
$\vec{w} = k\vec{u} + \vec{v} = k[1, 1, 1] + [1, 2, 3] = [k + 1, k + 2, k + 3]$
som gir:
$\vec{u} \times \vec{w} = \vec{u} \times (k\vec{u} + \vec{v}) = [1, 1, 1] \times [k + 1, k + 2, k + 3] =$
$[1(k + 3) - (k + 2)1, -1(k + 3) + (k + 1)1, 1(k + 2) - (k + 1)1] = [1, -2, 1]$