Oppgaver i kapittel 1.4

151, **152**, **153**, **156**, **157**, **159**, **160**

151 a)

$\overrightarrow{AB} = (3,2,2), \quad \overrightarrow{AC} = [2,1,3]$

Normalvektor til plan: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [3,2,2] \times [2,1,3] = [4,-5,-1]$

Vektor til generelt punkt P: $\overrightarrow{AP} = [x-1, y+1, z-1]$

$\overrightarrow{AP} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow [x-1, y+1, z-1] \cdot [4,-5,-1] = 0 \Leftrightarrow$

$$4x - 5y - z - 8 = 0$$

152 b)

Retningsvektor linje og normalvektor til plan: $[-2,4,-4]$

Velger halvparten av denne som normalvektor: $\vec{n} = [-1,2,-2]$

Vektor til generelt punkt P: $\overrightarrow{AP} = [x-1, y+5, z+3]$

$\overrightarrow{AP} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow [x-1, y+5, z+3] \cdot [-1,2,-2] = 0 \Leftrightarrow$

$$x - 2y + 2z - 5 = 0$$

153

a)

$x = 0$
(Alle punkter i yz –planet har x –koordinat 0. $x = 0$ er en ligning med tre ukjente („$x + 0y + 0z + 0 = 0$,") og er derfor ligningen for et plan som inneholder alle disse punktene.)

b)

Plan α:
$\alpha \parallel xz$ –plan $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{e_x} = [0,1,0]$

Punkt i plan i avstand 6: $\overrightarrow{OP} = \pm6[0,1,0] = [0,\pm6,0] \Leftrightarrow P = (0,\pm6,0)$

$[x, y \mp 6, z] \cdot [0,1,0] = 0 \Leftrightarrow y \mp 6 = 0$

Eller direkte: y –koordinaten må være ±6; $y = \pm6 \Leftrightarrow y \mp 6 = 0$

c)

Gjør det mer generelt, da dette er en berømt setning som har vært brukt i eksamensoppgaver:
Planet skjærer x –aksen i $(a,0,0)$, y –aksen i $(0,b,0)$ og z –aksen i $(0,0,c)$.

Lager to vektorer: $[-a, b, 0]$ og $[-a, 0, c]$

Finner normalvektor til plan: $\vec{n} = [-a, b, 0] \times [-a, 0, c] = [bc, ac, ab]$

Bruker punktet $(a, 0, 0)$ og får: $[x-a, y, z] \cdot [bc, ac, ab] = 0 \Leftrightarrow$

$$bcx + acy + abz - abc = 0 \Leftrightarrow \tfrac{1}{a}x + \tfrac{1}{b}y + \tfrac{1}{c}z = 1$$

Som er lett å huske... :-)

I dette tilfellet: $a = b = c = 2$: $x + y + z - 2 = 0$

156 b)

Det nye planet må ha normalvektor som står normalt på normalvektorene til de to opprinnelige planene:

$\vec{n} = [1, 2, -1] \times [3, 1, -4] = [-7, 1, -5]$

$[x-1, y, z-4] \cdot [-7, 1, -5] = 0 \Leftrightarrow 7x - y + 5z - 27 = 0$

157

a)

Minste vinkel mellom linjer i hvert plan som står normalt på skjæringslinjen mellom planene.

b)

$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \vec{n_\alpha} \perp \vec{n_\beta} \Leftrightarrow \vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_\beta} = 0$

c)

$\vec{n_\alpha} = [1, -1, -1], \quad \vec{n_\beta} = [1, -2, 3]$

$$\cos\phi = \frac{\vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_\beta}}{|\vec{n_\alpha}||\vec{n_\beta}|} = \frac{[1, -1, -1] \cdot [1, -2, 3]}{\sqrt{3}\,\sqrt{14}} = 0 \Leftrightarrow \phi = 90^\circ$$

159

a)

Planet må gå gjennom et punkt Q som ligger midt mellom A og B:

$\vec{OQ} = \tfrac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) = [3, 1, 1] \Leftrightarrow Q = (3, 1, 1)$

Planet må også stå normalt på $\vec{AB} = [2, 2, -2]$; velger $\vec{n} = [1, 1, -1]$

$[x-3, y-1, z-1] \cdot [1, 1, -1] = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 3 = 0$

b)

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + z^2}$$

Kvadrer: $x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 - 4z + 4 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 + z^2 \Leftrightarrow$
$4x + 4y - 4z - 12 = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 3 = 0$

Som selvfølgelig gir samme ligning, da alle løsninger for punktet P må ligge i dette planet.

160

a)

I ***to*** nye plan som er parallelt med det opprinnelige planet.
(***Et på hver side!***)
Og, de har samme normalvektor som det opprinnelige planet...

b)

Normalvektor: $\vec{n} = \overrightarrow{n_\Pi} = [1,2,2]$ (Samme normalvektor! Se a)...)

Trenger et punkt i Π, velger $y = 0, z = 0$ og får $x = 9$: $P = (9,0,0)$

Finner punkt Q i nye plan ved å gå fra P langs normalvektor til Q:

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} \pm 6\,\vec{e} =$ (Enhetsvektor $\vec{e}$ langs $\vec{n}$.)

$\overrightarrow{OP} \pm 6\,\frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n} =$ (Legg merke til hvordan vi lager enhetsvektor!
Deler med lengden for å få lengden 1!)

$[9,0,0] \pm \frac{6}{3}[1,2,2] =$
$[9 \pm 2, \pm 4, \pm 4]$

$Q_1 = (11,4,4)$ eller $Q_2 = (7,-4,-4)$

Plan gjennom Q_1:
$[x-11, y-4, z-4] \cdot [1,2,2] = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 27 = 0$

Plan gjennom Q_2:
$[x-7, y+4, z+4] \cdot [1,2,2] = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z + 9 = 0$

161

Finner A på x –aksen slik at $\overrightarrow{AP} \perp x$ –akse$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{e_x}$:
$\overrightarrow{AP} = [2-x, -5-0, 1-0] = [2-x, -5, 1]$

$[2-x, -5, 1] \cdot [1,0,0] = 0 \Leftrightarrow x = 2$

): $\overrightarrow{AP} = [0,-5,1]$

Tilsvarende punkt B på x –akse, slik at $\overrightarrow{BQ} \perp \overrightarrow{e_x}$:
$\overrightarrow{BQ} = [-2-x, 1-0, 0-0] = [-2-x, 1, 0]$

$[-2-x, 1, 0] \cdot [1,0,0] = 0 \Leftrightarrow x = -2$

): $\overrightarrow{BQ} = [0,1,0]$

Parallellforskyver vi disse vektorene slik at de får et fellespunkt på x –aksen,
ser vi at vinkelen mellom planet er vinkelen mellom $\overrightarrow{AP}$ og $\overrightarrow{BQ}$.

$$\cos\phi = \frac{\vec{AP}\cdot\vec{BQ}}{|\vec{AP}||\vec{BQ}|} = \frac{[0,-5,1]\cdot[0,1,0]}{\sqrt{26}} = -\frac{5}{\sqrt{26}} \Leftrightarrow \phi \approx 11.3^\circ$$

162

a)

Normalvektoren må stå normalt på alle linjer i planet, derfor også x –aksen.
Normalvektoren kan derfor ikke ha noen x-komponent.

($\vec{n} \cdot \vec{e_x} = [x,y,z] \cdot [1,0,0] = x$, som er forskjellig fra 0, hvis $x \neq 0$.)

b)

xy –planet har normalvektor: $\vec{e_z} = [0,0,1]$

Normalvektor for planet, $\vec{n} = [0,y,z]$ må da oppfylle:

$$\frac{\vec{n}\cdot\vec{e_z}}{|\vec{n}||\vec{e_z}|} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \frac{\vec{n}\cdot\vec{e_z}}{|\vec{n}||\vec{e_z}|} = \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$[0,y,z]\cdot[0,0,1] = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{y^2+z^2} \Leftrightarrow z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{y^2+z^2} \Rightarrow$$

$$z^2 = \frac{3}{4}(y^2+z^2) \Leftrightarrow z^2 = 3y^2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{3}\,y$$

Velger $y = 1$: $\quad \vec{n} = [0,1,\pm\sqrt{3}\,]$

Som punkt i planet velger vi selvfølgelig $O = (0,0,0)$ og får betingelsen:

$$[x-0, y-0, z-0]\cdot[0,1,\pm\sqrt{3}\,] = 0 \Leftrightarrow y \pm \sqrt{3}z = 0$$