Oppgaver som illustrerer alle teknikkene i 1.4 og 1.5

Gitt 3 punkter $A = (1,1,1), B = (2,1,3), C = (3,4,5)$

I Finne ligning for plan gjennom 3 punkt

Lager to vektorer i planet: $\overrightarrow{AB} = [1,0,2]$ og $\overrightarrow{AC} = [2,3,4]$

Lager normalvektor $\overrightarrow{n_\alpha}$ til planet:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [1,0,2] \times [2,3,4] = [-6,0,3] = -3[2,0,-1]$$

Velger: $\overrightarrow{n_\alpha} = [2,0,-1]$

Med $P(x,y,z)$ som bevegelig punkt i planet må vi ha: $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{n_\alpha} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = 0 \Leftrightarrow$

$[x-1, y-1, z-1] \cdot [2,0,-1] = 0 \Leftrightarrow$

$2x - 2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow$

Ligning for planet: $\alpha : 2x - z + 1 = 0$

(At y-ledd ikke forekommer betyr at planet er parallelt med y-aksen!)

II Finne parameterfremstilling for plan

Lager de to vektorene i planet på samme måte som i I.

Da må et punkt i planet kunne nåes med vektor fra origo:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow [x,y,z] = [1,1,1] + s[1,0,2] + t[2,3,4]$ (Vektorform)

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= 1 + s + 2t \\ y &= 1 + 3t \\ z &= 1 + 2s + 4t \end{aligned} \right\}$$ (Parameterform)

III Fra parameterfremstilling til ligning

Ut fra parameterfremstillingen $\left\{ \begin{aligned} x &= 1 + s + 2t \\ y &= 1 + 3t \\ z &= 1 + 2s + 4t \end{aligned} \right\}$

kan vi fra kolonnene i parameterfremstillingen plukke ut:

Punkt i planet: $A(1,1,1)$ (Første kolonne.)

To vektorer i planet: $[1,0,2]$ og $[2,3,4]$ (Andre og tredje kolonne.)

Derfra kan vi gjøre som i I:

Lage normalvektor $\vec{n}$ vha. $[1,0,2] \times [2,3,4]$ og

lage ligning med: $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$

IV Fra ligning til parameterfremstilling

I eksempel 7 side 51 ser vi en tungvindt (og dårlig forklart) måte å gjøre dette på,
vi lærer oss heller en ***mye enklere metode***:
Ligning for planet vårt: $\alpha : \quad 2x - z + 1 = 0$

Vi velger rett og slett $x = t$ og $y = s$ som parametere, og finner den tredje parameteren z ved hjelp av ligningen: $z = 2x + 1 = 2t + 1$
og får direkte:

$$\left\{ \begin{array}{lll} x = & & t \\ y = & s & \\ z = 1 & & +2t \end{array} \right\}$$

Som REMA1000 sier: "Det enkleste er det beste!"
(REMA har stjålet denne fra Einstein: "*Make it as simple as possible*, **but not simpler!**")
(Vi regner for moro skyld tilbake til ligning for å se om det stemmer:
Tar ut fra kolonnene punktet $(0,0,1)$ og vektorene i planet $[0,1,0]$ og $[1,0,2]$.
Lager vi normalvektoren $\vec{n} = [0,1,0] \times [1,0,2] = [2,0,-1]$
får vi igjen ligningen: $[x,y,z-1] \cdot [2,0,-1] = 0 \Leftrightarrow 2x - z + 1 = 0$)

V Er to plan parallelle?

Gitt et plan til; $\beta : \quad x + 2y + z + 1 = 0$

Hvis planet β skal være parallelt med planet α må normalvektorene være parallelle:

Dette kan sjekkes enten med vektorligningen

$$\vec{n_\alpha} = k\,\vec{n_\beta}$$

eller med vektorproduktet:

$$\vec{n_\alpha} \times \vec{n_\beta} \qquad \text{(Må være null hvis vektorene er parallelle.)}$$

VI Vinkel mellom to plan

Hvis planene α og β ikke er parallelle kan vi finne vinkelen mellom dem som vinkelen mellom normalvektorene:

$$\cos v = \frac{\vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_\beta}}{|\vec{n_\alpha}|\,|\vec{n_\beta}|} = \frac{[2,0,-1] \cdot [1,2,1]}{\sqrt{5}\,\sqrt{6}} \approx 0.1826 \Rightarrow v \approx 79.5^\circ$$

Hvis $v > 90^\circ$ fordi en av normalvektorene står motsatt vei, må vi justere til $180^\circ - v$.
(Se figur side 42 i læreboken!)

VII Skjæringslinjen mellom to plan

En retningsvektor $\vec{r_m}$ for skjæringslinjen m mellom planene
$\alpha : \quad 2x - z + 1 = 0$ og $\quad \beta : \quad x + 2y + z + 1 = 0$

kan vi finne som vektorproduktet

$$\vec{r_m} = \vec{n_\alpha} \times \vec{n_\beta} = [2,0,-1] \times [1,2,1] = [2,-3,4]$$

da denne retnngsvektoren må stå normalt på begge normalvektorene!

Da trenger vi bare et punkt på skjæringslinjen. Vi har to ligninger for to plan som begge må tilfredsstilles for et slikt punkt, altså har vi to ligninger med 3 ukjente koordinater. Vi ***velger*** derfor en av koordinatene, for eksempel $x = 0$.

Da har vi ligningene:
$$1)\quad -z + 1 = 0$$
$$2)\quad 2y + z + 1 = 0$$

Vi løser med hensyn på x og z og får $z = 1$ og $y = \frac{-1-z}{2} = \frac{-1-1}{2} = -1$

Punktet blir da $Q = (0, -1, 1)$ og vi kan regne ut parameterfremstillingen:

$$\overrightarrow{OP} = OQ + t \cdot \overrightarrow{r_m} \Leftrightarrow [x, y, z] = [0, -1, 1] + t[2, -3, 4] \qquad \text{(Vektorform.)}$$
$\Leftrightarrow$
$$\left\{\begin{array}{l} x = \quad -3t \\ y = -1 - 3t \\ z = \ 1 + \ 4t \end{array}\right\} \qquad \text{(Parameterform.)}$$

VIII Er en linje og et plan parallelle?

Vi lanserer linjen $\quad l :$
$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 3t \\ y = \quad 2t \\ z = 1 + 4t \end{array}\right\}$$

Her kan vi ut fra kolonnene plukke ut et punkt på linjen: $(1, 0, 1)$
Og en retningsvektor: $\vec{r} = [3, 2, 4]$

Hvis planet og linjen er parallelle må linjens retningsvektor stå normalt på planets normalvektor:
$$\vec{r} \perp \overrightarrow{n_\alpha} \Leftrightarrow \vec{r} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = 0$$
Vi sjekker: $\quad \vec{r} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = [3, 2, 4] \cdot [2, 0, -1] = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 2$
Linjen og planet er altså ikke parallelle.

IX Skjæringspunkt mellom linje og plan

Et skjæringspunkt S mellom linjen l :
$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 3t \\ y = \quad 2t \\ z = 1 + 4t \end{array}\right\}$$
og planet $\qquad \alpha : \quad 2x - z - 1 = 0$
må ha koordinater som passer i alle ligningene, så vi setter inn koordinatene fra l i ligningen for α: $\quad 2(1 + 3t) - (1 + 4t) - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$$2 + 6t - 1 - 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 0$$
$t = 0$ gir punktet $\quad S = (1 + 3 \cdot 0, 2 \cdot 0, 1 + 4 \cdot 0) = (1, 0, 1)$

X Vinkel mellom linje og plan

Vinkelen mellom linjen l og planet α er definert som den minste vinkelen mellom linjen og linjer i planet gjennom skjæringspunktet S, eller rett og slett vinkelen mellom linjen og linjens projeksjon ned i planet.

Vi finner først vinkelen mellom linjens retningsvektor og planets normalvektor:

$$\cos\theta = \frac{\vec{n_\alpha}\cdot\vec{r}}{|\vec{n_\alpha}|\,|\vec{r}|} = \frac{[2,0,-1]\cdot[3,2,4]}{\sqrt{5}\,\sqrt{29}} \approx 0.1661 \Rightarrow \theta \approx 80.4^\circ$$

Da er den søkte vinkelen: $u = 90^\circ - 80.4^\circ = 9.6^\circ$

(Hvis $\theta > 90^\circ$ må vi isteden bruke $u = \theta - 90^\circ$! Se figur side 46 i læreboken!)

XI Finne ligninger for en linje

Dette brukes ikke så ofte, men det står litt om dette side 48 og 49, så da kan det kanskje være aktuelt til eksamen?

Viktig:

Det finnes ikke ***en*** ligning for en linje i rommet!
Linjer må oppgies som ***to*** ligninger i rommet!
Disse ligningene er da egentlig ligningene for to plan og linjen de skal representere er rett og slett skjæringslinjen mellom de to planene ligningene representerer!

Et eksempel er skjæringslinjen m : $\left\{\begin{aligned} x &= \quad -3t \\ y &= -1-3t \\ z &= \;\;1+\;4t \end{aligned}\right\}$

mellom de to planene

$$\alpha : \quad 2x - z + 1 = 0 \text{ og } \quad \beta : \quad x + 2y + z + 1 = 0$$

i VII!

Ligningsfremstillingen for m er derfor rett og slett: $\left\{\begin{aligned} 2x - z + 1 &= 0 \\ x + 2y + z + 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$

En mer vanlig skrivemåte får vi ved å eliminere henholdsvis y og z fra ligningene og løse med hensyn på x:

Addisjon av ligningene gir da:

$3x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2y-2}{3}$ (Eliminerer z og uttrykker x ved y.)

Da første ligning ikke inneholder y kan vi finne x uttrykt ved z direkte:

$$2x - z + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{z-1}{2}$$

Altså har vi: $x = \frac{-2y-2}{3} = \frac{z-1}{2}$

Eller som boken skriver: $\frac{x}{1} = \frac{-2y-2}{3} = \frac{z-1}{2}$

I praksis kjenner vi ikke planene som gir linjen vår som en skjæringslinje og må ta utgangspunkt i parameterfremstillingen.

La oss bruke

$$m\ :\quad \left\{\begin{array}{l} x = - 3t \\ y = -1 - 3t \\ z = 1 + 4t \end{array}\right\}$$

som eksempel.

Vi løser alle tre ligninger med hensyn på t og får:

$$t = \tfrac{-x}{3} = \tfrac{-y-1}{3} = \tfrac{z-1}{4}$$

Altså med vår nye skrivemåte: $\tfrac{-x}{3} = \tfrac{-y-1}{3} = \tfrac{z-1}{4}$

Eventuelt: $x = y + 1 = \tfrac{-3z+3}{4}$ (Etter multiplikasjon med –3.)