Oppgaver fra 1.5 og 1.6:

164, 165, 168, 170, 171, 177, 178, 180, 181

164

a)
Lager retningsvektor for l: $\vec{r_l} = [-1,0,1]$
Vektorfremstilling: $[x,y,z] = \overrightarrow{OA} + t\cdot\vec{r_l} = [1,-1,1] + t[-1,0,1]$

$$\Leftrightarrow l : \left\{ \begin{array}{c} x = 1-t \\ y = -1 \\ z = 1+t \end{array} \right\}$$

b)
Π : $2x + y - z = 5$ Normalvektor: $\vec{n} = [2,1,-1]$

Ikke skjæring hvis $\vec{n} \perp \vec{r_l} \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{r_l} = 0$
$\vec{n}\cdot\vec{r_l} = [2,1,-1]\cdot[-1,0,1] = -3$

): l og Π skjærer hverandre
c)
Skjæringspunkt når: $2(1-t) + (-1) - (1+t) = 5 \Leftrightarrow t = -\frac{5}{3}$
): $(1-(-\frac{5}{3}),-1,1-\frac{5}{3}) = (\frac{8}{3},-1,-\frac{2}{3})$ (Feil i fasit.)

165

Normalvektorer: $\vec{n_\alpha} = [2,1,-1]$ og $\vec{n_\beta} = [1,-1,3]$
a) Disse er ikke parallelle, så planene er ikke parallelle, og må derfor skjære hverandre.
b) Se figur side 42. Skjæringslinjen ligger i ***begge*** plan og retningsvektoren $\vec{r_l}$ for skjæringslinjen må derfor være parallell med begge plan. $\vec{r_l}$ står derfor normalt på begge normalvektorer og er derfor parallell med $\vec{n_\alpha}\times\vec{n_\beta}$, som da også kan brukes som retningsvektor.
c) Retningsvektor: $\vec{r_l} = \vec{n_\alpha}\times\vec{n_\beta} = [2,1,-1]\times[1,-1,3] = [2,-7,-3]$
Velger et felles punkt for α og β ved å velge $x = 0$, og sette inn i ligningene for planene:
$y - z = 4 \wedge -y + 3z = 6 \Leftrightarrow y = 9 \wedge z = 5$
): $(0,9,5)$

$$l : \quad [x,y,z] = [0,9,5] + t[2,-7,-3] \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 2t \\ y = 9-7t \\ z = 5-3t \end{array} \right\}$$

167

Retningsvektor for linjen, $\vec{r} = [1,2,-1]$, må stå normalt på planets normalvektor $\vec{n} = [3,-1,1]$ hvis linjen er parallell med planet:
$\vec{r}\cdot\vec{n} = [1,2,-1]\cdot[3,-1,1] = 3-2-1 = 0$ OK!
Hvis linjen skal ligge i planet, må også et punkt på linje ligge i planet: (Da ligger også alle andre punkter på linjen i planet.)
Tester $(1,0,4)$:
$VS = 3\cdot 1 - 0 + 4 = 7$ OK!

): Linjen ligger i planet.

Alternativt: $3(t+1)-(2t)+(-t+4) = 7 \Leftrightarrow 0t = 0 \Leftrightarrow L = \mathbb{R}$
Ubestemt ligning, alle t er mulige løsninger, så alle punkter på linjen passer i ligningen for planet.

168

a)
Retningsvektor for skjæringslinje l: $\overrightarrow{n_\Pi} \times \overrightarrow{n_\Sigma} = [1,2,1] \times [2,1,-1] = [-3,3,-3] = -3[1,-1,1]$
Velger $\overrightarrow{r_l} = [1,-1,1]$.
Punkt på skjæringslinje, velger $x = 0$:
$2y+z = 4 \wedge y-z = 5 \Leftrightarrow y = 3 \wedge z = -2$
): $(0,3,-2)$

$$l: \quad \left\{ \begin{array}{c} x = t \\ y = 3-t \\ z = -2+t \end{array} \right\}$$

b)
$\overrightarrow{AB} = [2,1,-2]$
Vi har da to vektorer parallelle med planet og kan finne en normalvektor:
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{r_l} = [2,1,-2] \times [1,-1,1] = [-1,-4,-3] = -[1,4,3]$
Velger $\vec{n} = [1,4,3]$

Bruker punktet A og får:
$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow [x-2, y, z-2] \cdot [1,4,3] = 0 \Leftrightarrow x-2+4y+3z-6 = 0 \Leftrightarrow$
$x+4y+3z-8 = 0$

170

a)
Jeg velger meg parameteren t som $x-1$ og får da:
$t = x-1 = \frac{y+2}{4} = \frac{z-2}{2}$

Dette gir parameterfremstillingen: $\left\{ \begin{array}{c} x = 1+t \\ y = -2+4t \\ z = 2+2t \end{array} \right\}$

som igjen gir punktet $P = (1,-2,2)$ og retningsvektoren $\overrightarrow{r_l} = [1,4,2]$.
b)

$[x,y,z] = [4,-1,2] + t[3,-2,1] \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 4+3t \\ y = -1-2t \\ z = 2+t \end{array} \right\}$

som igjen gir: $t = \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-2} = z-2$
c)
Den andre ligningen gir: $y = 2-3z$ (eller $z = \frac{2-y}{3}$)
Innsatt i den første: $x = y+z-1 = 2-3z+z-1 = 1-2z$

Da har vi: $x = 1-2z = 1-2(\frac{2-y}{3}) = \frac{3-4+2y}{3} = \frac{2y-1}{3}$
eller: $x = \frac{2y-1}{3} = 1-2z$

Kan justere til fasitsvar: $\frac{x-1}{2} = \frac{\frac{2y-1}{3}-1}{2} = \frac{1-2z-1}{2}$ som gir

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-1}$$

171

a)
Ligningene representerer alle plan og en eventuell unik løsning representerer skjæringspunktet mellom disse tre planene.
Skjæringslinjen mellom de to siste planene har retningsvektor $\overrightarrow{r_{23}} = [a_2, b_2, c_2] \times [a_3, b_3, c_3]$.
Hvis det bare er en unik løsning, må det første planet ikke være parallelt med $\overrightarrow{r_{23}}$, altså må normalvektoren $\overrightarrow{n_1}$ til det første planet ***ikke*** stå normalt på $\overrightarrow{r_{23}}$:

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{r_{23}} \neq 0 \iff [a_1, a_2, a_3] \cdot ([a_2, b_2, c_2] \times [a_3, b_3, c_3]) \neq 0$$

(Trykkfeil i oppgaven, den siste normalvektoren skal selvsagt ikke ha noen fjerde komponent d_3.)
b)

$$[4,1,2] \cdot ([2,2,-1] \times [3,-2,1]) = [4,1,2] \cdot [0,-5,-10] = -25$$

Ligningene har altså en løsning.
Må løse tre ligninger med tre ukjente:

$$4x + y + 2z - 2 = 0$$
$$2x + 2y - z - 9 = 0$$
$$3x - 2y + z - 1 = 0$$

som etter mye kjedelig regning gir $x = 2, y = \frac{4}{5}$ og $z = -\frac{17}{5}$.

Med lommeregner kan man bruke MATRIX knappen og legge inn:

$$[A]=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \quad [B]=\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1}[B] \text{ gir da: } \begin{bmatrix} 2 \\ .8 \\ -3.4 \end{bmatrix}$$

$$\text{MATH,Frac gir } \begin{bmatrix} 2 \\ 4/5 \\ -17/5 \end{bmatrix}$$

177

a) P i plan?:

$$2 + 2 \cdot 3 + 2(-1) - 6 = 2 + 6 - 2 - 6 = 0 \qquad):P \text{ i plan}$$

Q i plan?:

$$-1 + 2 \cdot 0 + 2(-3) - 6 = -1 - 6 - 6 = -13 \qquad):Q \text{ ikke i plan}$$

b)

$$\vec{n} = [1,2,2], \qquad |\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

c)

$$\left| \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{[3,3,2] \cdot [1,2,2]}{3} \right| = \frac{13}{3}$$

Dette er projeksjonen av $\overrightarrow{QP}$ på normalvektoren til planet, altså avstanden fra Q til planet.
Se figur og utledning av denne formelen på side 57.

178

Denne oppgaven finner avstanden mellom to vindskjeve linjer på "den tungvindte metoden".
(Se eksempel 4 side 55.)
Formelen side 61 gir en bedre måte å regne ut denne avstanden på, så vi gjør det også til slutt.

a) $\overrightarrow{PQ}$ som ***variabel*** vektor:

$$\overrightarrow{PQ} = [-2s-2-(4t+1), 2s+1-(t-1), 3s-(-t+1)] \ = [-2s-4t-3, 2s-t+2, 3s+t-1$$

b) $\overrightarrow{PQ}$ må stå normalt på retningsvektorene til l og m:

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{r_l} = 0 \Leftrightarrow [-2s-4t-3, 2s-t+2, 3s+t-1]\cdot[4,1,-1] = 0 \Leftrightarrow$$
$$-8s-16t-12+2s-t+2-3s-t+1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$-9s-18t-9 = 0 \Leftrightarrow s+2t+1 = 0$$

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{r_m} = 0 \Leftrightarrow [-2s-4t-3, 2s-t+2, 3s+t-1]\cdot[-2,2,3] = 0 \Leftrightarrow$$
$$4s+8t+6+4s-2t+4+9s+3t-3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$17s+9t+7 = 0$$

Løser ligningssystemet:

$$s+2t+1 = 0 \wedge 17s+9t+7 = 0 \Leftrightarrow$$
$$s = -1-2t \wedge 17(-1-2t)+9t+7 = 0 \Leftrightarrow$$
$$s = -1-2t \wedge -25t-10 = 0$$
$$s = -1-2(-\tfrac{2}{5}) = -\tfrac{1}{5} \wedge t = -\tfrac{2}{5}$$

$$\overrightarrow{PQ} = [-2(-\tfrac{1}{5})-4(-\tfrac{2}{5})-3, 2(-\tfrac{1}{5})-(-\tfrac{2}{5})+2, 3(-\tfrac{1}{5})+(-\tfrac{2}{5})-1] = [-1,2,-2]$$

c) $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$ som er avstanden mellom l og m.

Bedre metode, med $\overrightarrow{PQ}$ som vektor mellom to ***valgte***, ***faste*** punkt på l og m:

Velger $P = (1,-1,1)$ på l, ved å sette $t = 0$.
Velger $Q = (-2,1,0)$ på m, ved å sette $s = 0$.

$$\overrightarrow{PQ} = [-3,2,-1]$$

Finner en vektor normalt på l og m:

$$\overrightarrow{r_l}\times\overrightarrow{r_m} = [4,1,-1]\times[-2,2,3] = [5,-10,10] = 5[1,-2,2]$$

Velger $\vec{n} = [1,-2,2]$

Avstanden mellom l og m blir da projeksjonen av $\overrightarrow{PQ}$ på $\vec{n}$:

$$a = \left|\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \left|\frac{[-3,2,-1]\cdot[1,-2,2]}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}\right| = 3$$

(Dette er en "bedre" metode i den forstand at man slipper å løse ligningssystemer og
kan velge fine tall for P og Q :-))

180

a) Retningsvektorene for de to linjene må stå normalt på normalvektoren til søkt plan, så:
$\vec{r_l} \times \vec{r_m} = [2,-1,1] \times [3,1,-2] = [1,7,5]$

$\vec{n} = [1,7,5]$

Planet inneholder l, så vi finner et punkt i planet, P, på l: $P = (1,0,0)$ for $t = 0$.

Ligning for planet: $[x-1,y,z] \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow [x-1,y,z] \cdot [1,7,5] = 0 \Leftrightarrow$
$x + 7y + 5z - 1 = 0$

b) Velger $Q = (3,-2,2)$ på m for $s = 0$.

$\overrightarrow{PQ} = [2,-2,2]$

Avstanden blir projeksjonen av $\overrightarrow{PQ}$ på $\vec{n}$:

$$a = \left| \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{[2,-2,2] \cdot [1,7,5]}{\sqrt{1^2+7^2+5^2}} \right| = \left| \frac{-2}{\sqrt{75}} \right| = \frac{2}{5\sqrt{3}} \approx 0.231$$

181

l: $A = (0,0,4)$ og $B = (0,3,0) \Rightarrow \vec{r_l} = \overrightarrow{AB} = [0,3,-4]$

m: $C = (6,0,0)$ og $D = (0,-2,0) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = [-6,-2,0] = -2[3,1,0]$
Velger $\vec{r_m} = [3,1,0]$

Vektor normalt på l og m:

$\vec{r_l} \times \vec{r_m} = [0,3,-4] \times [3,1,0] = [4,-12,-9] = \vec{n}$

Avstand blir projeksjonen av $\overrightarrow{AC} = [6,0,-4]$ på $\vec{n}$.

$$a = \left| \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{[6,0,-4] \cdot [4,-12,-9]}{\sqrt{4^2+12^2+9^2}} \right| = \frac{60}{\sqrt{241}} \approx 3.86$$