Oppgave 134

Oppgave 134 virker litt forvirrende, **så en kommentar er på sin plass**.

Det de gjør her er å vise at hvis vi definerer vektorproduktet som:

- $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\sin\alpha$ (Tilsvarer areal av utspent parallellogram.)
- Retningen på $\vec{u} \times \vec{v}$ bestemt av hørehåndsregel.
- Vanlige regneregler skal gjelde, eksempelvis den i oppgave 134:
  $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d}$
  (Vektor-"produkt" skal oppføre seg som et vanlig produkt!)

Så kan vi ***utlede*** den litt pussige koordinatformelen vi bruker:

$$\vec{u} \times \vec{v} = [y_1z_1 - z_1y_2, -(x_1z_2 - z_1x_2), x_1y_2 - y_1x_2]$$

Eksempel 5 side 30 viser hvordan man også kan gjøre oppgave 134.

Øverst side 31 står det fulle beviset for at:

$$\vec{u} \times \vec{v} = [x_1,y_1,z_1] \times [x_2,y_2,z_2] = [y_1z_1 - z_1y_2, -(x_1z_2 - z_1x_2, x_1y_2 - y_1x_2]$$

(*Oppgave 134, eksempel 5 og beviset øverst side 31 er ikke noe man gjør til vanlig, bare* ***en*** *gang for å overbevise seg selv om at koordinatformelen gir riktig svar.)*

Vi tar det her med litt flere forklaringer:

$$[x_1,y_1,z_1] \times [x_2,y_2,z_2] = (x_1\vec{e_x} + y_1\vec{e_y} + z_1\vec{e_z}) \times (x_2\vec{e_x} + y_2\vec{e_y} + z_2\vec{e_z}) =$$

$$\begin{aligned} &x_1\vec{e_x} \times x_2\vec{e_x} + x_1\vec{e_x} \times y_2\vec{e_y} + x_1\vec{e_x} \times z_2\vec{e_z} + \qquad \text{(Vanlige regneregler...)}\\ &y_1\vec{e_y} \times x_2\vec{e_x} + y_1\vec{e_y} \times y_2\vec{e_y} + y_1\vec{e_y} \times z_2\vec{e_z} +\\ &z_1\vec{e_z} \times x_2\vec{e_x} + z_1\vec{e_z} \times y_2\vec{e_y} + z_1\vec{e_z} \times z_2\vec{e_z} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x_1x_2\vec{e_x} \times \vec{e_x} + x_1y_2\vec{e_x} \times \vec{e_y} + x_1z_2\vec{e_x} \times \vec{e_z} + \qquad \text{(Skifter rekkefølge på faktorer...)}\\ &y_1x_2\vec{e_y} \times \vec{e_x} + y_1y_2\vec{e_y} \times \vec{e_y} + y_1z_2\vec{e_y} \times \vec{e_z} +\\ &z_1x_2\vec{e_z} \times \vec{e_x} + z_1y_2\vec{e_z} \times \vec{e_y} + z_1z_2\vec{e_z} \times \vec{e_z} = \end{aligned}$$

Alle vektorpodukter av enhetsvektorene kan regnes ut ved hjelp av definisjonen, da alle har lengde 1 og alle danner vinkelen 0° eller 90°:

Alle har da enten lengden:

$$1 \cdot 1 \cdot \sin 0^\circ = 0$$

eller

$$1 \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = 1$$

Retningen er 90° på planet definert av de to enhetsvektorene og dessuten gitt av høyrehåndsregelen, så resultatet blir da enten:

$$\vec{0}$$

eller

$\pm\overrightarrow{e_i}$ der i er enhetsvektor normalt på planet gjennom de to vi vektormultipliserer

Så vi får:

$\overrightarrow{e_x} \times \overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{0}$
$\overrightarrow{e_x} \times \overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_z}$
$\overrightarrow{e_x} \times \overrightarrow{e_z} = -\overrightarrow{e_y}$
$\overrightarrow{e_y} \times \overrightarrow{e_x} = -\overrightarrow{e_z}$
$\overrightarrow{e_y} \times \overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{0}$
$\overrightarrow{e_y} \times \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_x}$
$\overrightarrow{e_z} \times \overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{e_y}$
$\overrightarrow{e_z} \times \overrightarrow{e_y} = -\overrightarrow{e_x}$
$\overrightarrow{e_z} \times \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{0}$

Og kan forenkle fra:

$$x_1x_2\overrightarrow{e_x} \times \overrightarrow{e_x} + x_1y_2\overrightarrow{e_x} \times \overrightarrow{e_y} + x_1z_2\overrightarrow{e_x} \times \overrightarrow{e_z} +$$
$$y_1x_2\overrightarrow{e_y} \times \overrightarrow{e_x} + y_1y_2\overrightarrow{e_y} \times \overrightarrow{e_y} + y_1z_2\overrightarrow{e_y} \times \overrightarrow{e_z} +$$
$$z_1x_2\overrightarrow{e_z} \times \overrightarrow{e_x} + z_1y_2\overrightarrow{e_z} \times \overrightarrow{e_y} + z_1z_2\overrightarrow{e_z} \times \overrightarrow{e_z} =$$

til:

$$\begin{array}{llllll} & \overrightarrow{0} & + \quad x_1y_2 & \overrightarrow{e_z} & + \quad x_1z_2 & (-\overrightarrow{e_y}) + \\ y_1x_2 & (-\overrightarrow{e_z}) & + & \overrightarrow{0} & + \quad y_1z_2 & \overrightarrow{e_x} + \\ z_1x_2 & \overrightarrow{e_y} & + \quad z_1y_2 & (-\overrightarrow{e_x}) & + & \overrightarrow{0} = \end{array}$$

$$(y_1z_2 - z_1y_2)\ \overrightarrow{e_x} \quad + \quad (z_1x_2 - x_1z_2)\ \overrightarrow{e_y} \quad + \quad (x_1y_2 - y_1x_2)\ \overrightarrow{e_z} \quad =$$

$$[y_1z_1 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2] \qquad QED$$