Vektorer - Blandede oppgaver

X1.2, 3,4,5,6,7,8

X 1.2

a)
$x^2 - 2x + 1^2 + y^2 - 4y + 2^2 + z^2 + 2z + 1^2 = 3 + 1^2 + 2^2 + 1^2$
$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3^2$

b)
): Kule med sentrum $S = (1,2,-1)$ og radius $R = 3$

c)
$VS = (2-1)^2 + (0-2)^2 + (1+1)^2 = 9$
$HS = 3^2 = 9$
): $A = (2,0,1)$ ligger på kuleflaten

d)
$\overrightarrow{SB} = -\overrightarrow{SA} = -[1,-2,2] = [-1,2,-2]$

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SB} = [1,2,-1] + [-1,2,-2] = [0,4,-3] \Leftrightarrow B = (0,4,-3)$

X 1.3

a)
$\overrightarrow{AB} = [-a,b,0] \qquad \overrightarrow{AC} = [-a,0,c]$

b)
$\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB} = [bc,ac,ab] \cdot [-a,b,0] = -abc + acb = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \overrightarrow{AB}$

$\vec{v} \cdot \overrightarrow{AC} = [bc,ac,ab] \cdot [-a,0,c] = -abc + abc = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \overrightarrow{AC}$

$\vec{v}$ står normalt på to vektorer i planet og er derfor normalvektor.

c)
Med $A = (a,0,0)$ som punkt i planet får vi ligningen:

$[x-a, y-0, z-0] \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow [x-a,y,z] \cdot [bc,ac,ab] = 0 \Leftrightarrow$
$bcx - abc + acy + abz = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad QED$

X 1.4

a)
$C = (0,3,0), \qquad E = (2,0,5), \qquad F = (2,3,5)$

b)
$\overrightarrow{CE} = [2,-3,5] \qquad \Rightarrow \qquad \left|\overrightarrow{CE}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{38} \approx 6.16$

$\overrightarrow{CF} = [2,0,5]$

$$\cos(\triangle ECF) = \frac{\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}}{\left|\overrightarrow{CE}\right|\left|\overrightarrow{CF}\right|} = \frac{[2,-3,5]\cdot[2,0,5]}{\sqrt{38}\sqrt{29}} = \frac{29}{\sqrt{38}\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{29}{38}}$$
$$\Rightarrow \triangle ECF = 29.1^\circ$$

c)

$$l : [x,y,z] = \overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{CE} = [0,3,0] + t[2,-3,5] \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x = & 2t \\ y = & 3-3t \\ z = & 5t \end{array} \right\}$$

d)

Linje gjennom A og G:

$A = (2,0,0), \quad G = (0,3,5), \quad \overrightarrow{AG} = [-2,3,5]$
$m : [x,y,z] = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AG} = [2,0,0] + s[-2,3,5]$

Skjæring l og m:

$$2t = 2-2s \wedge 3-3t = 3s \wedge 5t = 5s \Leftrightarrow$$
$$2t = 2-2t \wedge 3-3t = 3t \wedge t = s \Leftrightarrow$$
$$t = \tfrac{1}{2} \wedge t = \tfrac{1}{2} \wedge s = t = \tfrac{1}{2}$$

): l og m skjærer hverandre

e)

Origo som punkt og $\overrightarrow{CE}$ som normalvektor gir:

$$[x-0, y-0, z-0]\cdot[2,-3,5] = 0 \Leftrightarrow 2x-3y+5z = 0$$

f)

$$d = \frac{|2\cdot0-3\cdot3+5\cdot0+0|}{\sqrt{2^2+3^2+5^2}} = \frac{9}{\sqrt{38}} \approx 1.46$$

X 1.5

a)

$x^2+y^2-6y+3^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2 = 3^2$
$S_1 = (0,3), \quad R_1 = 3$

$x^2-28x+14^2+y^2-20y+10^2 = -196+14^2+10^2 \Leftrightarrow$
$(x-14)^2+(y-10)^2 = 10^2$
$S_2 = (14,10), \quad R_2 = 10$

b)

Minste avstand: $\left|\overrightarrow{S_1S_2}\right| - R_1 - R_2 = |[14,7]| - R_1 - R_2 =$
$\sqrt{14^2+7^2} - 3 - 10 = 7\sqrt{5} - 13 \approx 2.65$

(Feil i fasit, fasit har funnet ***største*** avstand...)

X 1.6

a)

$\overrightarrow{BA} = [-3,0,-1], \quad \overrightarrow{BC} = [-2,-1,-2]$

$$\cos \measuredangle ABC = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{[-3,0,-1]\cdot[-2,-1,-2]}{\sqrt{3^2+1^2}\,\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{8}{3\sqrt{10}} \Rightarrow \cos \measuredangle ABC \approx 32.5^\circ$$

b)

Normalvektor: $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = [-3,0,-1] \times [-2,-1,-2] = [-1,-4,3]$

Velger: $\vec{n} = [1,4,-3]$

Med A som punkt får vi ligningen:

$$[x-1, y-1, z-0] \cdot [1,4,-3] = 0 \Leftrightarrow$$
$$x + 4y - 3z - 5 = 0$$

c)

$\overrightarrow{BD} = [-1,9,3]$

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BD}\right| = \frac{1}{6}|[-1,-4,3] \cdot [-1,9,3]| = \frac{1}{6}|-26| = \frac{13}{3} \approx 4.33$$

d)

$P = (0,0,k)$

$\overrightarrow{DP} = [-3,-10,k-4]$ må stå normalt på $\vec{n} = [1,4,-3]$:

$$\overrightarrow{DP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow [-3,-10,k-4] \cdot [1,4,-3] = 0 \Leftrightarrow$$
$$-3 - 40 - 3k + 12 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{12-3-40}{3} = -\frac{31}{3}$$

): $P = (0,0,-\frac{31}{3})$

X 1.7

Feil i oppgave og fasit.
b) går ikke hvis ikke linjen har parameterfremstillingen:

$$l : \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + t \\ y = -8 + 2t \\ z = -7 + 4t \end{array} \right\}$$

(-2 istedenfor 2 i x –komponenten)

Endel fasitsvar blir pga. dette feil...

a)

$\alpha : 2x - 3y + z - 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Normalvektor: $\overrightarrow{n_\alpha} = [2,-3,1]$

y –aksen har retningsvektor: $\overrightarrow{e_y} = [0,1,0]$

$$\cos \measuredangle \vec{n}, \overrightarrow{e_y} = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{e_y}}{|\vec{n}||\overrightarrow{e_y}|} = \frac{[2,-3,1]\cdot[0,1,0]}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = -\frac{3}{\sqrt{14}} \Rightarrow \measuredangle \vec{n}, \overrightarrow{e_y} \approx 143.3^\circ$$

Vinkel mellom y –akse og plan: $143.3^\circ - 90^\circ \approx 53.3^\circ$

b)

Setter inn koordinatene til et punkt på linjen i ligningen for planet:

$2(t-2) - 3(2t-8) + (4t-7) - 13 = 0 \Leftrightarrow$

$2t - 4 - 6t + 24 + 4t - 7 - 13 = 0 \Leftrightarrow$

$0t = 0$

Ubestemt ligningssystem, $L = \mathbb{R}$.

): Alle punkt på linjen ligger i planet.

c)

$\vec{r_l} = [1,2,4]$

Normalvektor for β må stå normalt på $\vec{r_l}$ og $\vec{n_\alpha}$:

$\vec{r_l} \times \vec{n_\alpha} = [1,2,4] \times [2,-3,1] = [14,7,-7] = 7[2,1,-1]$

Velger: $\vec{n_\beta} = [2,1,-1]$

Med punktet $(-2,-8,-7)$ ($t = 0$ i l) får vi ligningen for planet β:

$[x+2, y+8, z+7] \cdot [2,1,-1] = 0 \Leftrightarrow$

$2x + y - z + 5 = 0$ (Fasit feil her...)

d)

P innsatt i ligningen for α:

$2(e^k - 1) - 3(2e^k - 6) + (e^{2k}) - 13 = 0 \Leftrightarrow$

$e^{2k} - 4e^k + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$(e^k)^2 - 4(e^k) + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$e^k = 1 \vee e^k = 3 \Leftrightarrow$

$k = 0 \vee k = \ln 3$

e)

Avstand: $a = \frac{|2(e^k-1)-3(2e^k-6)+(e^{2k})-13|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}|e^{2k} - 4e^k + 3| = \frac{1}{\sqrt{14}} f(k)$

Finner maksimum av $f(k)$:

$f'(k) = 2e^{2k} - 4e^k$

$f'(k) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2k} - 4e^k = 0 \Leftrightarrow 2e^k(e^k - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$e^k = 0 \vee e^k = 2 \Leftrightarrow k = \ln 2$ (e^k kan aldri bli 0.)

$a_{\max} = \frac{1}{\sqrt{14}}|4 - 4 \cdot 2 + 3| = \frac{1}{\sqrt{14}} \approx 0.267$

X 1.8

a)

$\alpha: \quad 2x - y + z - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n_\alpha} = [2,-1,1]$

Avstand: $a = \frac{|2(3)-(-4)+(2)-3|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{9}{\sqrt{6}} \approx 3.67$

b)

$\overrightarrow{PQ} = [-5,10,5] = -5[1,-2,-1]$

Velger retningsvektor for linjen (l): $\vec{r_l} = [1,-2,-1]$

l på vektorform: $[x,y,z] = \overrightarrow{OP} + t\vec{r_l} = [3,-4,2] + t[1,-2,-1] = [t+3, -2t-4, -t+2]$

Skjæringspunktet med α, R, gitt av:

$2(t+3) - (-2t-4) + (-t+2) - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$3t + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$t = -3$

$\overrightarrow{OR} = [-3+3, -2(-3)-4, -(-3)+2] = [0,2,5] \Leftrightarrow R = (0,2,5)$

c)

$\overrightarrow{RP} = [3,-6,-3] = 3[1,-2,-1]$

$\overrightarrow{RQ} = [-2,4,2] = -2[1,-2,-1]$

P og Q ligger på hver sin side av α da $\overrightarrow{RP}$ og $\overrightarrow{RQ}$ har motsatt retning.

d)

En regel fra R1 som vi må huske:

Hvis M ligger midt mellom A og B, så har vi "midtpunktsetningen":

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

Her, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \frac{1}{2}([3,-4,2] + [-2,6,7]) = [\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{2}] \Leftrightarrow M = (\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{2})$

e)

Alle punkt som ligger like langt fra P som Q ligger i et plan, β, gjennom M med $\overrightarrow{PQ}$ som normalvektor.

Vi har før vist at $\overrightarrow{PQ} = [-5,10,5] = -5[1,-2,-1]$, så vi velger $\overrightarrow{n_\beta} = [1,-2,-1]$
(Samme vektor som var retningvektoren $\overrightarrow{r_l}$ for linjen l i b).)

Ligning for β : $[x - \frac{1}{2}, y-1, z-\frac{9}{2}] \cdot [1,-2,-1] = 0 \Leftrightarrow$
$x - 2y - z + 6 = 0$

Hvis punktene også skal ligge i α, må de også oppfylle ligningen for $\alpha : 2x - y + z - 3 = 0$ og derfor ligge på skjæringslinjen mellom α og β, s:

Retningsvektor for s : $\overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{n_\beta} = [2,-1,1] \times [1,-2,-1] = [3,3,-3] = 3[1,1,-1]$

Velger: $\overrightarrow{r_s} = [1,1,-1]$

Trenger et punkt som oppfyller både $\beta : x - 2y - z + 6 = 0$ og $\alpha : 2x - y + z - 3 = 0$

Velger feks. $x = 0$ og får da ligningene

$-2y - z + 6 = 0 \wedge -y + z - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \wedge z = 4$
): $(0,1,4)$

Parameterfremstilling for punktene:
$[x,y,z] = [0,1,4] + t\,\overrightarrow{r_s} = [0,1,4] + t[1,1,-1] \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{array}\right\}$$

e) kunne også vært løst direkte ut fra ligningene $\beta : x - 2y - z + 6 = 0$ og $\alpha : 2x - y + z - 3 = 0$

Velger parameter $t = x$ og får da:

$\beta : t - 2y - z + 6 = 0 \Leftrightarrow 2y + z = 6 + t$

og

$\alpha : 2t - y + z - 3 = 0 \Leftrightarrow y - z = 2t - 3$

Løser mhp. y og z og får: $y = t + 1$ og $z = -t + 4$

Altså samme resultat: $x = t \wedge y = t + 1 \wedge z = -t + 4$