R2 - 07.10.11

Kapittel 1: Vektorer

Løsningsskisser

I

Gitt punktene $A(0,1,0)$, $B(4,3,1)$, $C(2,5,6)$ og $D(1,1,9)$.
a) Finn $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|$.
b) Finn vinkelen $\angle AB, AC$.
c) Regn ut $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.
d) Hva er arealet utspent av $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$?
e) Finn volumet av pyramiden $ABCD$.
f) Finn ligningen for et plan α gjennom A, B og C.
g) Finn en parameterfremstilling for planet α.
h) Finn avstanden fra D til planet α.
i) Finn avstanden fra C til en linje l gjennom A og$B$.

Oppgave I er på lavt kompetansenivå, bruk av standard teknikker og innsetting av tall i formler:

a)

$$\overrightarrow{AB} = [4,2,1], \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2+2^2+1^2} = \sqrt{21} \approx 4.58$$

$$\overrightarrow{AC} = [2,4,6], \qquad \left|\overrightarrow{AC}\right| = |2[1,2,3]| = 2\sqrt{1^2+2^2+3^2} = 2\sqrt{14} \approx 7.48$$

b)

$\phi = \angle AB, AC$

$$\cos\phi = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{[4,2,1]\cdot[2,4,6]}{\sqrt{21}\,2\sqrt{14}} = \frac{22}{\sqrt{7}\sqrt{3}\,2\sqrt{7}\sqrt{2}} = \frac{11}{7\sqrt{6}} \approx 0.64153$$

$\phi \approx 50.1^\circ$

c)

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = [2\cdot 6 - 1\cdot 4, -(4\cdot 6 - 1\cdot 2), 4\cdot 4 - 2\cdot 2] = [8,-22,12]$$

d)

Areal parallellogram: $A = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = |[8,-22,12]| = |2[4,-11,6]| =$

$$2\sqrt{4^2+11^2+6^2} = 2\sqrt{173} \approx 26.3$$

e)

Volum pyramide: $V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}2|[4,-11,6]\cdot[1,0,9]| = \frac{58}{3} \approx 19.3$

f)
Normalvektor: $\overrightarrow{n_\alpha} = [4,-11,6]$ (Velger halvparten av $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$)

Gjennom A og $P = (x,y,z)$:
$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = 0 \Leftrightarrow [x,y-1,z] \cdot [4,-11,6] = 0 \Leftrightarrow 4x - 11y + 6z + 11 = 0$
g)

Kan bruke $A, \overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$: $\alpha : \left\langle \begin{array}{c} x = 0 + 4s + 2t \\ y = 1 + 2s + 4t \\ z = 0 + 1s + 6t \end{array} \right\rangle$

Alternativt velge for eksempel $x = s, y = t$ og finne
$z = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{6}y - \frac{11}{6} =. -\frac{2}{3}s + \frac{11}{6}t - \frac{11}{6}$

Da får vi: $\alpha : \left\langle \begin{array}{c} x = s \\ y = t \\ z = -\frac{11}{6} - \frac{2}{3}s + \frac{11}{6}t \end{array} \right\rangle$

h)
Avstand som projeksjon av $\overrightarrow{AD}$ på $\overrightarrow{n_\alpha}$: $a = \left| \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{n_\alpha}}{|\overrightarrow{n_\alpha}|} \right| = \frac{[1,0,9] \cdot [4,-11,6]}{\sqrt{4^2+11^2+6^2}} = \frac{58}{\sqrt{173}} \approx 4.41$

i)
Avstand som høyde i parallellogram utspent av $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$:
$d = \frac{A}{\overrightarrow{AB}} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2\sqrt{173}}{\sqrt{21}} \approx 5.74$

II

En kuleflate har ligningen: $x^2 - 4x + y^2 - 18y + z^2 - 4z + 8 = 0$
a) Hva er sentrum S og radius R i kuleflaten?
b) Kuleflaten blir tangert av et plan $\alpha : x - 2y + 2z - 15 = 0$. Finn tangeringspunktet T.
c) Finn ligningen for de to planene som har avstanden 15 fra S og er parallelle med α.
d) To plan parallelt med α har avstanden 5 fra S. Hva er radius r i sirkelen som er skjæringskurven mellom kuleflaten og disse planene?
Hva er høyden i kulesegmentene som disse planene deler kuleflaten i?

Oppgave II er på middels kompetansenivå. Her må man tenke og resonnere, men oppgavene er standard rutineoppgaver.

a)
Lager fulle kvadrater: $x^2 - 4x + 2^2 + y^2 - 18y + 9^2 + z^2 - 4z + 2^2 = -8 + 2^2 + 9^2 + 2^2 \Leftrightarrow$
Kuleflate: $(x-2)^2 + (y-9)^2 + (z-2)^2 = 9^2$

): Sentrum $S = (2,9,2)$, Radius $R = 9$.

b)
Normalvektor til plan: $\vec{n} = [1,-2,2]$, $|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$
Går til tangeringspunkt via sentrum S:

$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OS} \pm R\frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n} = [2,9,2] \pm 9 \cdot \frac{1}{3}[1,-2,2] = [5,3,8]$
$T = (5,3,8)$ ($T = (-1,15,-4)$ forkastes da det ikke ligger i planet.)

c)
Plan parallelle med α har ligningen: $x - 2y + 2z + d = 0$

Vi bruker avstandsformelen og får betingelsen:
$\left|\frac{x_S - 2y_S + 2z_S + d}{|\vec{n}|}\right| = 15 \Leftrightarrow \left|\frac{2 - 2\cdot 9 + 2\cdot 2 + d}{3}\right| = 15 \Leftrightarrow$
$|d-12| = 45 \Leftrightarrow d - 12 = \pm 45 \Leftrightarrow d = 57 \vee d = -33$

): To plan: $x - 2y + 2z + 57 = 0$ og $x - 2y + 2z - 33 = 0$

d)
Finner de to planene på samme måte som i c):

$\left|\frac{x_S - 2y_S + 2z_S + d}{|\vec{n}|}\right| = 5 \Leftrightarrow \left|\frac{d-12}{3}\right| = 5 \Leftrightarrow |d-12| = 15 \Leftrightarrow d - 12 = \pm 15 \Leftrightarrow d = 27 \vee d = -3$

Tegn en snittfigur og bruk Pythagoras til å regne ut det vi trenger:
Radius i snittsirkel: $r = \pm\sqrt{9^2 - 5^2} = 2\sqrt{14} \approx 7.48$
Høydene: $h_1 = R - 5 = 9 - 5 = 4$
$h_2 = R + h_1 = 9 + 5 = 14$
(De to planene ligger symmetrisk om S, så snittfiguren gir de samme tallene for høydene uansett hvilket av de to planene vi bruker.)

III

a) Forklar hvilke muligheter vi har for å avgjøre om to linjer er parallelle.
b) Forklar hvilke muligheter vi har for å avgjøre om fire punkter ligger i samme plan.
c) Vis at avstanden mellom to plan $ax + by + cz + d_1 = 0$ og $ax + by + cz + d_2$ blir:
$a = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Oppgave III er på middelse og høyt kompetansenivå. Her må man tenke og resonnere og oppdage ting man kanskje ikke har tenkt over eller sett før.

a)
1) R1-metode: Sjekke om linjenes retningsvektorer er parallelle med vektorligning:
$\vec{r_l} \parallel \vec{r_m} \Leftrightarrow \vec{r_l} = k\vec{r_m}$

2) R2-metode: Sjekke om linjenes retningsvektorer er parallelle vha. vektorprodukt:
(Sjekker om utspent areal er null.)
$\vec{r_l} \parallel \vec{r_m} \Leftrightarrow \vec{r_l} \times \vec{r_m} = \vec{0}$

3) Sjekke om vinkelen mellom retningsvektorene er 0° eller 180° med skalarproduktformelen:
$\vec{r_l} \parallel \vec{r_m} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm 1$

(Sjekker vi om arealet utspent av retningsvektorene er null med arealformelen

$$|\vec{r_l} \times \vec{r_m}| = \sqrt{|\vec{r_l}|^2 |\vec{r_m}|^2 - (\vec{r_l} \cdot \vec{r_m})^2}$$

$$\vec{r_l} \parallel \vec{r_m} \Leftrightarrow \sqrt{|\vec{r_l}|^2 |\vec{r_m}|^2 - (\vec{r_l} \cdot \vec{r_m})^2} = 0 \Leftrightarrow |\vec{r_l}|^2 |\vec{r_m}|^2 - (\vec{r_l} \cdot \vec{r_m})^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{r_l}||\vec{r_m}| = \pm \vec{r_l} \cdot \vec{r_m} \Leftrightarrow \frac{\vec{r_l} \cdot \vec{r_m}}{|\vec{r_l}||\vec{r_m}|} = \pm 1 \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm 1$$

illustrerer dette sammenhengen mellom 2) og 3).)

b)

1)

Tre av punktene ligger alltid i et plan og definerer en trekant.
Hvis det fjerde punktet ikke ligger i samme plan, vil vi kunne lage en pyramide med toppunkt i det fjerde punktet og med trekanten som grunnflate. LIgger alle i samme plan blir volumet null:

A, B, C, D i samme plan$\Leftrightarrow$ $(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 0$

2)

En annen variant er å la $\vec{AB}$ og $\vec{AC}$ definere et koordinatsystem i et plan gjennom A, B og C.
Hvis D ligger i samme plan må det finnes en unik løsning av vektorligningen:

$\vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$

c)

Avstandsformelen $a = \frac{|ax_p + by_p + cz_p + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ degenererer til $a = \frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ når punktet ligger i origo.

Hvis to plan ligger på samme side av origo har d_1 og d_2 i de to ligningene for de to planene samme fortegn og vi må finne differansen $|d_1| - |d_2|$.

Ligger de på hver sin side har d_1 og d_2 motsatt fortegn og vi må finne summen $|d_1| + |d_2|$.

Begge tilfeller er ivaretatt i formelen: $a = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.