R2 - Kapittel 1: Vektorer

Kompetansenivåer: **L**(avt), **M**(iddels), **H**(øyt)

Løsningsskisser

Vanlige feil og tips:

- Korrekt og konsekvent avrunding:
  - Teoretiske oppgaver: Eksakte tall eller 3 gjeldende siffer.
  - Praktiske oppgaver: Samme antall gjeldende siffer som i oppgaveteksten.
- Tren på å regne eksakt så lenge som mulig, viktig å regne fort og riktig!
  - Også viktig for å få øye på forenklinger og snarveier!
- Tenk hele tiden! Løpende vurdering og kontroll av svar til slutt!
- Forståelse, oversikt og algebraferdigheter er det som gir resultater!
- Fokuser på å huske figurer, poenger og sammenhenger, ikke bare formler. (Formler verdiløse hvis man ikke forstår hvordan de skal brukes, og hva som skal settes inn i dem...)

I (L)

Gitt vektorene $\vec{u} = [1,1,3]$, $\vec{v} = [2,3,2]$ og $\vec{w} = [7,5,6]$
Regn ut:

a) $\vec{u} - \vec{v}$ b) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ c) $\vec{u} \times \vec{v}$ d) Projeksjonen av $\vec{v}$ på $\vec{u}$.
e) Arealet av parallellogrammet utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
f) Volumet av parallellepipedet utspent av $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$.
g) Enhetsvektor parallell med $\vec{u}$.

a) $\vec{u} - \vec{v} = [1,1,3] - [2,3,2] = [-1,-2,1]$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = [1,1,3] \cdot [2,3,2] = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 11$

c) $$\vec{u} \times \vec{v} = [1,1,3] \times [2,3,2] = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = [-7,4,1]$$

d) $\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{11}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}} = \frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11} \approx 3.32$

e) $A = |\vec{u} \times \vec{v}| = |[-7,4,1]| = \sqrt{7^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{66} \approx 8.12$

(Eventuelt: $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2} = \sqrt{11 \cdot 17 - 11^2} = \sqrt{66}$)

f) $V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| = |[-7,4,1] \cdot [7,5,6]| = |-7 \cdot 7 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 6| = 23$

g) $\vec{e} = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{11}}[1,1,3] = [\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}] \approx [0.302, 0.302, 0.905]$

II (LM)

Gitt punktene $A(0,0,0)$, $B(6,2,3), C(4,4,2)$ og $D(1,2,10)$.
a) Finn ligningen for et plan α gjennom A, B og C.
b) Finn en parameterfremstilling for planet α.
c) Hva er vinkelen mellom en linje l gjennom A og D og planet α?
d) Hva er avstanden fra punktet D til planet α?
e) Hva er avstanden mellom linjen l og en linje m gjennom B og C?

a) $\overrightarrow{AB} = [6,2,3], \qquad \overrightarrow{AC} = [4,4,2]$

Normalvektor til α: $\quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [6,2,3] \times [4,4,2] = [-8,0,16] = -8[1,0,-2]$

Velger: $\quad \vec{n} = [1,0,-2]$

α : $\quad [x-0, y-0, z-0] \cdot [1,0,-2] = 0 \Leftrightarrow x - 2z = 0$

b) En mulighet: $\quad [x,y,z] = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$

$[x,y,z] = [0,0,0] + s[6,2,3] + t[4,4,2] \Leftrightarrow$

$$\alpha : \left\{ \begin{array}{c} x = 6s + 4t \\ y = 2s + 4t \\ z = 3s + 2t \end{array} \right\}$$

Men som alltid, REMA 1000 anbefalingen er å foretrekke:

Bruker ligningen: $\quad x - 2z = 0$

og velger:

$y = s$ (Ligningen viser at y kan variere fritt!)

$z = t$ (Ligningen gir da $x = 2z = 2t$!)

og får:

$$\alpha : \left\{ \begin{array}{c} x = 2t \\ y = s \\ z = t \end{array} \right\}$$

(Et eksempel til:

Har vi ligningen til et plan som $2x + y - 3z - 5 = 0$,

kan vi velge to av variablene som parametere, eksempelvis:

$$\left\{ \begin{array}{c} x = s \\ y = 5 - 2s + 3t \\ z = t \end{array} \right\} \quad)$$

c) Retningsvektor for linjen l: $\quad \vec{r_l} = \overrightarrow{AD} = [1,2,10]$

Normalvinkel planet α : $\quad \vec{n} = [1,0,-2]$

$$\cos\phi = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AD}|\,|\vec{n}|} = \frac{[1,2,10]\cdot[1,0,-2]}{\sqrt{105}\sqrt{5}} = -\frac{19}{\sqrt{21}\sqrt{5}\sqrt{5}} = -\frac{19}{5\sqrt{21}} \approx -0.82923$$

$\phi = 146^\circ$

Vinkelen vi ønsker: $\quad 146^\circ - 90^\circ = 56^\circ$

d) Avstand: $\quad a = \left| \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{[1,2,10]\cdot[1,0,-2]}{\sqrt{5}} \right| = \frac{19}{\sqrt{5}} \approx 8.50$

e) Vindskjeve linjer:

Retningsvektorer: $\vec{r_l} = \overrightarrow{AD} = [1,2,10]$
$\vec{r_m} = \overrightarrow{BC} = [-2,2,-1]$

Normalvektor på begge linjene:
$\vec{n} = \vec{r_l} \times \vec{r_m} = [1,2,10] \times [-2,2,-1] = [-22,-19,6]$

Vektor fra et punkt på l til punkt på m: $\overrightarrow{AB} = [6,2,3]$

Avstand som projeksjon: $b = \left| \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{[6,2,3] \cdot [-22,-19,6]}{\sqrt{22^2+19^2+6^2}} \right| = \frac{152}{\sqrt{881}} \approx 5.12$

III (M)

En kuleflate har ligningen $x^2 - 6x + y^2 + z^2 = 0$.
a) Finn sentrum S og radien R i kulenflaten.
b) Finn skjæringspunktene A og B mellom kuleflaten og linjen gitt ved parameterfremstillingen

$$l : \left\{ \begin{array}{c} x = 3 + t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{array} \right\}$$

c) Finn ligningene for planene som tangerer kuleflaten i punktene A og B.
d) Hva er radien r i skjæringssirkelen mellom kuleflaten og et plan som har avstanden 1 fra S?

a) Omformer: $x^2 - 6x + 3^2 + y^2 + z^2 = 3^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 + z^2 = 3^2$
): Radius: $R = 3$ Sentrum: $S = (3,0,0)$

b) Må oppfylle alle ligninger:
$(3 + t - 3)^2 + (2t)^2 + (2t)^2 = 3^2 \Leftrightarrow t^2 + 4t^2 + 4t^2 = 3^2 \Leftrightarrow 9t^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 1$
$t = -1$:
$A = (3 - 1, 2(-1), 2(-1)) = (2,-2,-2)$
$t = 1$:
$B = (3 + 1, 2, 2) = (4,2,2)$

c)
Vi ser at parameterfremstillingen kan skrives: $[x,y,z] = [3,0,0] + t[1,2,2]$
Vi ser at både A og B ligger i avstanden 3 fra S, altså er AB diameter i kuleflaten!
De parallelle tangentplanene har derfor begge $\vec{n} = [1,2,2]$ som normalvektor.
(Hvis vi ikke ser dette, oppdager vi det når vi lager vektorene $\overrightarrow{SA} = [-1,-2,-2]$ og $\overrightarrow{SB} = [1,2,2]$ som normalvektorer til hvert av de to tangentplanene!)

Plan gjennom A :
$[x-2, y+2, z+2] \cdot [1,2,2] = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z + 6 = 0$
Plan gjennom B :
$[x-4, y-2, z-2] \cdot [1,2,2] = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 12 = 0$

d)
Figur viser at vi kan bruke Phytagoras: $r^2 + 1^2 = R^2 \Leftrightarrow$
$r = \sqrt{R^2 - 1} = \sqrt{3^2 - 1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.83$

IV (MH)

a) Forklar hvordan du kan avgjøre om tre punkter A, B og C ligger på linje.
Tre plan har normalvektorene $\overrightarrow{n_\alpha}$, $\overrightarrow{n_\beta}$, og $\overrightarrow{n_\gamma}$.
b) Forklar hvordan du kan avgjøre om planene er parallelle.
c) Forklar hvordan du kan avgjøre om planene har et felles skjæringspunkt.
d) Forklar hvordan du kan avgjøre om fire punkter A, B, C og D ligger i samme plan.

a)
Lager $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ (eksempelvis), og sjekker om $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$

b)
Hvis planene er parallelle, må også normalvektorene være det: $\overrightarrow{n_\alpha} \| \overrightarrow{n_\beta} \| \overrightarrow{n_\gamma}$.
Sjekker om dette er tilfelle med: $\overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{n_\beta} = \vec{0} \wedge \overrightarrow{n_\beta} \times \overrightarrow{n_\gamma} = \vec{0}$

c)
To av planene må ha en skjæringslinje l med retningsvektor $\overrightarrow{r_l} = \overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{n_\beta}$.
Det tredje planet må skjære l og ikke inneholde l, så det tredje planet kan ikke stå normalt på $\overrightarrow{r_l}$: $\overrightarrow{r_l} \cdot \overrightarrow{n_\gamma} \neq 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{n_\beta}) \cdot \overrightarrow{n_\gamma} \neq 0$

d)
Hvis de ikke ligger i samme plan vil $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AD}$ spenne ut et parallellepiped med volum: $V = \left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}\right|$
Hvis de ligger i samme plan vil parallellepipedet klappe sammen og volumet blir 0, så punktene ligger i samme plan hvis $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

V(H)

Vi har gitt to vektorer $\vec{u} = [1,2,2]$ og $\vec{v} = [2,3,4]$.
a) Finn vektoren $\vec{w} = \vec{u} + |\vec{u}| \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}$.
b) Vis at $\vec{w}$ halverer vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
c) Bevis at $\vec{w} = \vec{u} + |\vec{u}| \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}$ alltid halverer vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
(Tips: Diagonalene i en rombe halverer vinklene i hjørnene de går igjennom.)

a)
$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

$$\vec{w} = \vec{u} + |\vec{u}| \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v} = [1,2,2] + 3\frac{1}{\sqrt{29}}[2,3,4] = [1 + \frac{6}{\sqrt{29}}, 2 + \frac{9}{\sqrt{29}}, 2 + \frac{12}{\sqrt{29}}]$$
$$\approx [2.11, 3.67, 4.23]$$

b)
$$|\vec{w}| = \sqrt{(1 + \frac{6}{\sqrt{29}})^2 + (2 + \frac{9}{\sqrt{29}})^2 + (2 + \frac{12}{\sqrt{29}})^2} = \sqrt{\frac{96}{\sqrt{29}} + 18}$$
$$\cos(\measuredangle \vec{u}, \vec{w}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|} = \frac{[1,2,2] \cdot [1+\frac{6}{\sqrt{29}}, 2+\frac{9}{\sqrt{29}}, 2+\frac{12}{\sqrt{29}}]}{3 \cdot \sqrt{\frac{96}{\sqrt{29}}+18}} \approx 0.99759$$
$$\measuredangle \vec{u}, \vec{w} \approx 8.83^\circ$$
$$\cos(\measuredangle \vec{w}, \vec{v}) = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{|\vec{w}||\vec{v}|} = \frac{[1+\frac{6}{\sqrt{29}}, 2+\frac{9}{\sqrt{29}}, 2+\frac{12}{\sqrt{29}}] \cdot [2,3,4]}{\sqrt{29}\sqrt{\frac{96}{\sqrt{29}}+18}} \approx 0.99759$$
$$\measuredangle \vec{u}, \vec{w} \approx 8.83^\circ$$

Strengt tatt har vi ikke vist at den halverer ***nøyaktig***, men det blir mye tidsbruk på algebra hvis vi skal vise at cosinus-verdiene blir eksakt like...
Dessuten viser vi det jo generelt i c) :-)

Vi ***kunne*** ha gjort:

$$\cos(\measuredangle \vec{u},\vec{w}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|} = \frac{\vec{u}\cdot(\vec{u}+|\vec{u}|\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v})}{|\vec{u}||\vec{w}|} = \frac{|\vec{u}|^2+|\vec{u}|\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{w}|} = \frac{|\vec{u}|+\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{w}|}$$

$$\cos(\measuredangle \vec{w},\vec{v}) = \frac{\vec{w}\cdot\vec{v}}{|\vec{w}||\vec{v}|} = \frac{(\vec{u}+|\vec{u}|\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v})\cdot\vec{v}}{|\vec{w}||\vec{v}|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{u}|\frac{1}{|\vec{v}|}|\vec{v}|^2}{|\vec{w}||\vec{v}|} = \frac{\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{u}|}{|\vec{w}|}$$

$\cos(\measuredangle \vec{u},\vec{w}) = \cos(\measuredangle \vec{w},\vec{v})$, så $\measuredangle \vec{u},\vec{w}) = \measuredangle \vec{w},\vec{v})$, *QED*

Dette er da også en løsning av c), da vi ikke har forutsatt noe om $\vec{u}$ og $\vec{v}$!

Men, legg merke til hvor mye enklere beviset i c) går med enhetsvektorer:

c)
Spenner ut romben med $\vec{u}$ og en
vektor med ***samme*** lengde som $\vec{u}$, parallell med v: $|\vec{u}|\vec{e} = |\vec{u}|\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$
Da blir diagonalen i romben summen: $\vec{w} = \vec{u} + |\vec{u}|\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$
Da diagonalene i romben halverer hjørnene de går gjennom har vi
bevist at $\vec{w}$ halverer $\measuredangle \vec{u},\vec{v}$.