R2 - Kapittel 1.1 - 1.3 - 12.09.12

Løsningsskisser

I

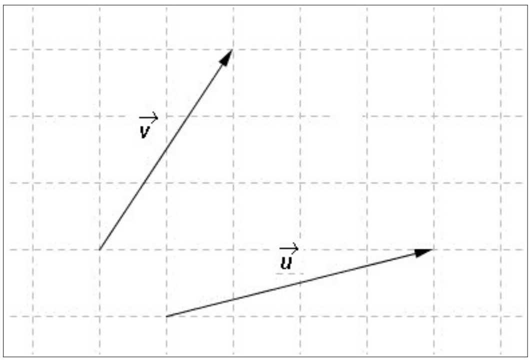
Gitt punktene $A(2, 1, 3)$ og $B(5, -2, 4)$.
a) Finn vektor $\overrightarrow{AB}$.
b) Finn lengden av vektor $\overrightarrow{AB}$.

a) $\overrightarrow{AB} = [5-2, -2-1, 4-3] = [3, -3, 1]$

b) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{19} \approx 4.36$

II

Gitt vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ i rutenettet under:

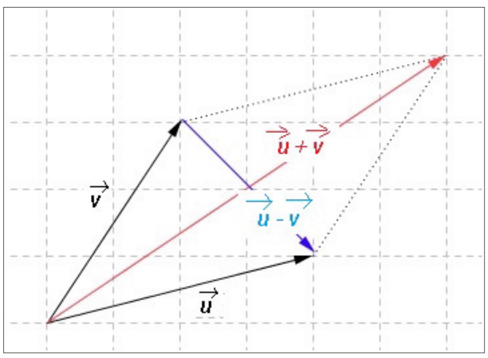


Figur 1

a) Tegn vektorene inn i figuren:
i) $\vec{u} + \vec{v}$ ii) $\vec{u} - \vec{v}$ iii) $-\frac{1}{2}\vec{u}$

b) Regn også ut vektorene i i), ii) og iii) på koordinatform.
c) Finn $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

a) For eksempel:



b) i) $\vec{u} + \vec{v} = [4,1] + [2,3] = [6,4]$ ii) $\vec{u} - \vec{v} = [4,1] - [2,3] = [2,-2]$
iii) $-\frac{1}{2}[4,1] = [-2,-\frac{1}{2}]$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = [4,1] \cdot [2,3] = 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 11$

III

Gitt vektorene $\vec{u} = [2,1,3]$ og $\vec{v} = [-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}]$
Undersøk om $\vec{u} \parallel \vec{v}$. (Parallelle.)

$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow [2,1,3] = k[-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}] \Leftrightarrow$
$2 = -\sqrt{2}\,k \wedge 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}k \wedge 3 = -\frac{3}{2}\sqrt{2}\,k \Leftrightarrow$
$k = -\frac{2}{\sqrt{2}} \wedge k = -\frac{2}{\sqrt{2}} \wedge k = -\frac{3 \cdot 2}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$
): Vektorene er parallelle.

IV

Gitt vektorene $\vec{u} = [3,1,2]$ og $\vec{v} = [2,-1,5]$.
Regn ut:
a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
b) Vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
c) Projeksjonen av $\vec{u}$ på $\vec{v}$ som tall.
d) Projeksjonen av $\vec{u}$ på $\vec{v}$ som vektor.
e) $\vec{u} \times \vec{v}$.
f) Arealet utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = [3,1,2] \cdot [2,-1,5] = 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 = 15$

b) $\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{15}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2+5^2}} = \frac{15}{\sqrt{14}\sqrt{30}} \approx 0.73193$
$\alpha \approx 43^\circ$

c) $p = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{15}{\sqrt{30}}$ d) $\vec{p} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{15}{\sqrt{30}^2}[2,-1,5] = [1,-\frac{1}{2},\frac{5}{2}]$

e) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = [7,-11,-5]$

f) $A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{7^2 + 11^2 + 5^2} = \sqrt{195} \approx 14.0$

(Eventuelt: $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2} = \sqrt{14 \cdot 30 - 15^2} =$
$\sqrt{420 - 225} = \sqrt{195}$)

V

En rett linje l har parameterfremstillingen $l\ :\ \left\{\begin{array}{c} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{array}\right\}$

Finn skjæringspunktet mellom linjen l og xy –planet.

xy –plan: $\quad z = 0 \Leftrightarrow 3 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{2}$
$\quad x = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$
$\quad y = 2 - (-\frac{3}{2}) = \frac{7}{2}$
): $S = (-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 0)$

VI

Et plan α har parameterfremstillingen $\alpha\ :\ \left\{\begin{array}{c} x = 1 + 2s + t \\ y = 3 - s - t \\ z = 2 + s + 2t \end{array}\right\}$

Finn skjæringspunktet mellom planet α og z –aksen.

z –akse: $\quad x = y = 0 \Leftrightarrow 1 + 2s + t = 0 \wedge 3 - s - t = 0 \Leftrightarrow$
$\quad t = 7 \wedge s = -4$
$\quad x = 2 - 4 + 2 \cdot 7 = 12$
): $S = (0, 0, 12)$

VII

Finn volumet av parallellepipedet utspent av $\vec{u} = [1,1,4], \vec{v} = [2,2,1]$ og $\vec{w} = [4,2,3]$.

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot [4,2,3] = [-7,7,0] \cdot [4,2,3] =$$
$$-28 + 14 + 0 = -14$$

$$V = \left|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}\right| = 14$$

VIII

Forklar hvordan du kan sjekke om fire punkter A, B, C og D ligger i samme plan.

Vi kan lage vektorene $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AD}$.
Hvis punktene ligger i samme plan, må også de tre vektorene vi har laget ligge i samme plan.
Da må parallellepipedet de spenner ut være helt flatt og ha volumet 0, så vi har:
A, B, C og D i samme plan $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = 0$