R2 - 17.10.12

Kapittel 1: Vektorer

Løsningsskisser

I

Gitt punktene $A(1,0,2)$, $B(4,2,0)$, $C(2,6,1)$ og $D(3,4,5)$.
a) Finn $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ og $\left|\overrightarrow{AC}\right|$.
b) Finn vinkelen mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.
c) Finn arealet av parallellogrammet utspent av $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.
d) Finn volumet av tetraederet $ABCD$.
e) Finn ligningen for planet α gjennom A, B og C.
f) Finn avstanden fra D til linjestykket AB.
g) Finn avstanden fra D til planet α.
h) Finn avstanden mellom linjestykket CD og AB.

a)
$\overrightarrow{AB} = [3,2,-2]$, $\quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2+2^2+2^2} = \sqrt{17} \approx 4.12$
$\overrightarrow{AC} = [1,6,-1]$, $\quad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1^2+6^2+1^2} = \sqrt{38} \approx 6.164$

b)
$\cos\angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{[3,2,-2]\cdot[1,6,-1]}{\sqrt{17}\sqrt{38}} = \frac{17}{\sqrt{17}\sqrt{38}}$
$\cos\angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \approx 48.0^\circ$

c)
Areal: $A = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2} =$
$\sqrt{17\cdot 38 - 17^2} = \sqrt{357} \approx 18.9$

Eventuelt: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = [10,1,16]$
$A = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{10^2+1^2+16^2} = \sqrt{357} \approx 18.9$

d) Volum: $V = \frac{\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\right|}{6} = \frac{|[10,1,16]\cdot[2,4,3]|}{6} = \frac{72}{6} = 12$

e) Bruker normalvektor: $\vec{n} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = [10,1,16]$
og punktet $A = (1,0,2)$:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow [x-1, y, z-2] \cdot [10, 1, 16] = 0 \Leftrightarrow$$
$$10x + y + 16z - 42 = 0$$

f) Flere muligheter:

Avstand: $d = \text{høyde} = \frac{\text{Areal parallellogram}}{\text{grunnlinje}} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\left|\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 \cdot |\overrightarrow{AD}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD})^2}\right|}{\sqrt{17}} =$

$\frac{\sqrt{17 \cdot (2^2+4^2+3^2) - ([3,2,-2] \cdot [2,4,3])^2}}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17 \cdot 29 - 8^2}}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{429}}{\sqrt{17}} \approx 5.02$

Pythagoras: $d = \sqrt{AD^2 - p^2}$, der p er projeksjonen av AD på AB:

$p = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{[2,4,3] \cdot [3,2,-2]}{\sqrt{17}} = \frac{8}{\sqrt{17}}$

$d = \sqrt{29 - (\frac{8}{\sqrt{17}})^2} = \frac{\sqrt{429}}{\sqrt{17}} \approx 5.02$

g)

Avstand $a = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{[2,4,3] \cdot [10,1,16]}{\sqrt{10^2+1^2+16^2}} = \frac{72}{\sqrt{357}} \approx 3.81$

Eventuelt:

Volum$= \frac{\text{Grunnflate Høyde}}{3} \Leftrightarrow$

$\text{Høyde} = \frac{3 \cdot \text{Volum}}{\text{Grunnflate}} = \frac{3 \cdot 12}{\frac{\sqrt{357}}{2}} = \frac{72}{\sqrt{357}} \approx 3.81$

h)

Linjer gjennom CD og AB er vindskjeve linjer med retningsvektorer $\overrightarrow{CD} = [1, -2, 4]$ og $\overrightarrow{AB} = [3, 2, -2]$.

Normalvektor på CD og AB:

$$\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = [-4, 14, 8] = -2[2, -7, -4]$$

Velger $\vec{n} = [2, -7, -4]$

Avstand: Projeksjon av $\overrightarrow{AC}$ på $\vec{n}$:

$\left|\frac{\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \left|\frac{[1,6,-1] \cdot [2,-7,-4]}{\sqrt{2^2+7^2+4^2}}\right| = \left|\frac{-36}{\sqrt{69}}\right| = \frac{36}{\sqrt{69}} \approx 4.33$

II

En kuleflate har ligning $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 8z = 1$.

a) Finn sentrum S og radius R i kulen.

b) To plan, β og γ, er parallelle med xy –planet og tangerer kuleflaten. Finn de to tangeringspunktene.

c) Finn ligningene til planene β og γ.

d) Finn sentrum og radius til snittsirkelen mellom kuleflaten og xy –planet.

a) $(x^2 - 4x + 2^2) + (y^2 + 4y + 2^2) + (z^2 - 8z + 4^2) = 1 + 2^2 + 2^2 + 4^2 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 5^2$

): $S = (2, -2, 4)$ og $R = 5$

b) Normalvektor til planene: $\overrightarrow{e_z} = [0, 0, 1]$

Tangeringspunkter gitt ved:

$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OS} \pm R \cdot \overrightarrow{e_z} = [2, -2, 4] \pm 5[0, 0, 1] \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OT} = [2, -2, 9] \quad \vee \quad \overrightarrow{OT} = [2, -2, -1]$

): $T_1 = (2, -2, 9)$, $T_2 = (2, -2, -1)$

c) Ligningene for planene er da gitt ved:

$[x-2, y+2, z-9] \cdot [0, 0, 1] = 0 \Leftrightarrow \quad z - 9 = 0$

$[x-2, y+2, z+1] \cdot [0, 0, 1] = 0 \Leftrightarrow \quad z + 1 = 0$

d) xy –plan: $z = 0$ gir:

$(x-2)^2 + (y+2)^2 + (0-4)^2 = 5^2 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 3^2$ (Ligning for sirkel i xy –plan)

): Sentrum: $(2, -2, 0)$, Radius: 3

Eller mer direkte med figur:

S har avstand $d = 4$ fra xy –plan, da z –koordinat er 4!

Radius i snittsirkelen er da gitt ved:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

III

To plan er gitt ved ligningene:

$\alpha: \quad x + 2y - z - 4 = 0$

$\beta: \quad x - y - 3z + 6 = 0$

a) Finn vinkelen mellom planene α og β.
b) Finn en parameterfremstilling til skjæringslinjen l mellom planene.

a)
Vinkelen mellom planene lik vinkelen mellom normalvektorene:

$\overrightarrow{n_\alpha} = [1, 2, -1]$, $\overrightarrow{n_\beta} = [1, -1, -3]$

$$\cos\phi = \frac{\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}}{|\overrightarrow{n_\alpha}|\,|\overrightarrow{n_\beta}|} = \frac{[1,3,-1] \cdot [1,-1,-3]}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}\,\sqrt{1^2+1^2+3^2}} = \frac{1}{11}$$

): $\phi \approx 75.7^\circ$ (Ikke nødvendig å korrigere med $180^\circ - \phi$.)

b) Retningsvektor for skjæringslinjen:

$$\overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{n_\beta} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = [-7, 2, -3]$$

Velger: $\vec{r} = [7, -2, 3]$

Velger et punkt på skjæringslinjen med $x = 0$, da må:

$2y - z - 4 = 0 \wedge -y - 3z + 6 = 0$

Vi får punktet $(0, \frac{18}{7}, \frac{8}{7})$

og parameterfremstillingen: $l : \left\{ \begin{array}{c} x = 0 + 7t \\ y = \frac{18}{7} - 2t \\ z = \frac{8}{7} + 3t \end{array} \right\}$

(Viser seg at å velge $y = 0$ er lurest, da får vi punktet $(9, 0, 5)$ og

$l : \left\{ \begin{array}{c} x = 9 + 7t \\ y = -2t \\ z = 5 + 3t \end{array} \right\}$)

IV

Gitt to punkter $A(1, 1, 2)$ og $B(4, 5, 2)$. Et plan har avstanden 3 fra A og avstanden 2 fra B. Finn ligningen for planet.

$\overrightarrow{AB} = [3, 4, 0]$, $\quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5$

En løsning er da et plan som står normalt på $\overrightarrow{AB}$, da 3+2=5

Finner skjæringspunktet mellom dette planet og $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + 3\vec{e} = \overrightarrow{OA} + 3\frac{1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\overrightarrow{AB} =$

$[1, 1, 2] + 3\frac{1}{5}[3, 4, 0] = [\frac{14}{5}, \frac{17}{5}, 2]$

): $S = (\frac{14}{5}, \frac{17}{5}, 2)$

Med $\overrightarrow{AB}$ som normalvektor får vi ligningen for planet som:

$[x - \frac{14}{5}, y - \frac{17}{5}, z - 2] \cdot [3, 4, 0] = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 22 = 0$

(Det finnes også andre løsninger der planet ikke skjærer $\overrightarrow{AB}$.
Ut fra oppgavens opplysninger kan ikke disse finnes entydig, da det er mange plan som tangerer kuleflater rundt A og B med radiusene 3 og 2. Det er mulig å sette opp liginger og finne parameteriserte løsninger for disse planene, men det blir fryktelig komplisert...
Jeg så ikke disse mulighetene i farten og må derfor beklage oppgavens ordlyd. Likevel, den enkle løsningen bør man oppdage uansett...)