

R2 - Vektorer i rommet - 26.01.17

Del I - Uten hjelpemidler

Løsningsskisser - versjon 31.01.17

Oppgave 1

Gitt vektorene $\vec{u} = [1, 2, 3]$ og $\vec{v} = [2, -1, 4]$.

a) Regn ut $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) Regn ut $\vec{u} \times \vec{v}$ c) Regn ut $\vec{w} = \vec{u} + t \vec{v}$

d) Løs vektorligningen $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

e) For hvilken verdi av t er $|\vec{w}|$ minst? Kommenter svaret.

$$\text{a) } \vec{u} \cdot \vec{v} = [1, 2, 3] \cdot [2, -1, 4] = 1 \cdot 2 + 2(-1) + 3 \cdot 4 = 12$$

$$\text{b) } \vec{u} \times \vec{v} = [1, 2, 3] \times [2, -1, 4] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = [11, 2, -5]$$

$$\text{c) } \vec{w} = \vec{u} + t \vec{v} = [1, 2, 3] + t[2, -1, 4] = [1 + 2t, 2 - t, 3 + 4t]$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 &\Leftrightarrow [2, -1, 4] \cdot [1 + 2t, 2 - t, 3 + 4t] = 0 \Leftrightarrow \\ &2 + 4t - 2 + t + 12 + 16t = 0 \Leftrightarrow 21t + 12 = 0 \Leftrightarrow \\ &t = -\frac{12}{21} = -\frac{4}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } |\vec{w}| &= \sqrt{(1 + 2t)^2 + (2 - t)^2 + (3 + 4t)^2} = \sqrt{21t^2 + 24t + 14} = \sqrt{f(t)} \\ |\vec{w}| \text{ og } f(t) \text{ er minst når } f'(t) &= 0 \Leftrightarrow 42t + 24 = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$t = -\frac{24}{42} = -\frac{4}{7}$$

Vi ser at vi får samme svar i d) og e).

$\vec{w} = \vec{u} + t \vec{v} = [1 + 2t, 2 - t, 3 + 4t]$ er en posisjonsvektor for et punkt på en linje, altså en linje på vektorform, med \vec{v} som retningsvektor.

Når $\vec{w} \perp \vec{v}$ er \vec{w} kortest og representerer avstanden fra Origo til linjen.

Dette skjer når $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$, som i d), og også når $f(t)$ er minst som i e).

For *eksemplets* skyld tar jeg det også i GeoGebra CAS:

$u:=(1,2,3)$ $\rightarrow \mathbf{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$w:=u+t v$ $\rightarrow \mathbf{w} := \begin{pmatrix} 2 t + 1 \\ -t + 2 \\ 4 t + 3 \end{pmatrix}$
$v:=(2,-1,4)$ $\rightarrow \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$	$w \cdot v = 0$ Løs: $\left\{ t = -\frac{4}{7} \right\}$
$u \cdot v$ $\rightarrow 12$	$g(t) := w $ $\rightarrow \mathbf{g(t)} := \sqrt{21 t^2 + 24 t + 14}$
$u \cdot w$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$	$g'(t) = 0$ Løs: $\left\{ t = -\frac{4}{7} \right\}$

Oppgave 2

Gitt punktene $A = (2, 0, 2)$ og $B = (1, 3, 4)$.

- Finn parameterfremstillingen for linjen l gjennom A og B .
- Finn skjæringspunktet mellom linjen l og yz -planet.
- Regn ut avstanden mellom origo og linjen l .
- Finn avstanden mellom linjen l og z -aksen.
- Finn punktet på z -aksen som er nærmest linjen l .

a) Retningsvektor: $\vec{r} = \overrightarrow{AB} = [-1, 3, 2]$

Punkt A og retningsvektor \vec{r} gir posisjonsvektor til punkt på linje:

$$[x, y, z] = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{r} = [2, 0, 2] + [-1, 3, 2]t = [2 - t, 3t, 2 + 2t] \text{ (Vektorform)}$$

Parameterform:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = 2 + 2t \end{array} \right.$$

b) yz -plan: $x = 0 \Rightarrow 2 - t = 0 \Leftrightarrow t = 2$

$$y = 3 \cdot 2 = 6$$

$$z = 2 + 2 \cdot 2 = 6$$

Skjæringspunkt: $S_{yz} = (0, 6, 6)$

c) Som høyde i parallelogram utspent av \vec{r} og \overrightarrow{AO} :

$$\overrightarrow{AO} = [-2, 0, -2]$$

$$h = \frac{|\overrightarrow{AO} \times \vec{r}|}{|\vec{r}|} = \frac{|[-2, 0, -2] \times [-1, 3, 2]|}{|[-1, 3, 2]|} = \frac{|[6, 6, -6]|}{\sqrt{14}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \frac{3}{7} \sqrt{42}$$

(Alternativt med projeksjon: (Ikke bland disse metodene!)

$$p = \frac{|\vec{AO} \cdot \vec{r}|}{|\vec{r}|} = \frac{|[-2,0,-2] \cdot [-1,3,2]|}{\sqrt{14}} \cdot \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$h = \sqrt{AO^2 - p^2} = \sqrt{8 - \left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^2} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \frac{3}{7} \sqrt{42} \quad)$$

d) Vindskjeve linjer:

$$z\text{-aksen: } O = (0,0,0) \text{ og } \vec{r}_z = [0,0,1]$$

$$l: \quad A = (2,0,2) \text{ og } \vec{r} = [-1,3,2]$$

$$\text{Normalvektor til begge linjer: } \vec{r}_z \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = [-3, -1, 0]$$

$$\text{Velger: } \vec{n} = [3, 1, 0]$$

Avstand som projeksjon av $\vec{AO} = [-2, 0, -2]$ på \vec{n} :

$$a_{lz} = \left| \frac{\vec{AO} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{10} = \frac{3}{5} \sqrt{10}$$

e) Nærmeste punkt på z -aksen: $C = (0, 0, z)$ Vektor fra C til punkt P på linjen:

$$\vec{CP} = [2 - t, 3t, 2 + 2t - z]$$

Må stå normalt på begge og derfor være parallell med normalvektor:

$$\vec{CP} = k\vec{n} \Leftrightarrow [2 - t, 3t, 2 + 2t - z] = k[3, 1, 0] \Leftrightarrow$$

$$2 - t = 3k \wedge 3t = k \wedge 2 + 2t - z = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 - t = 9t \wedge k = 3t \wedge 2 + 2t - z = 0 \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{1}{5} \wedge k = \frac{3}{5} \wedge z = \frac{12}{5}$$

$$): \quad C = (0, 0, \frac{12}{5})$$

(Alternativt med CP som korteste avstand mellom linjene:

$$\vec{OC} + \vec{CP} = \vec{OP} \Leftrightarrow$$

$$\vec{OC} + \frac{6}{\sqrt{10}} \frac{1}{|\vec{n}|} \vec{n} = \vec{OP} \quad (\text{Lager enhetsvektor: } \frac{1}{|\vec{n}|} \vec{n} \text{ langs normalvektor.})$$

$$[0, 0, z] + \frac{6}{\sqrt{10}} \frac{1}{\sqrt{10}} [3, 1, 0] = [2 - t, 3t, 2 + 2t] \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{9}{5}, \frac{3}{5}, z\right] = [2 - t, 3t, 2 + 2t] \Leftrightarrow$$

$$\frac{9}{5} = 2 - t \wedge \frac{3}{5} = 3t \wedge z = 2 + 2t \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{1}{5} \wedge z = \frac{12}{5}$$

$$): \quad C = (0, 0, \frac{12}{5})$$

For *eksemplets* skyld tar jeg det også i GeoGebra CAS:

A:=(2,0,2) → A := (2, 0, 2)	pos(t)=(0,y,z) Løs: { {y = 6, z = 6, t = 2} }
B:=(1,3,4) → B := (1, 3, 4)); S=(0,6,6), når t=2
r:=Vektor[A,B] → r := $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	f(t):= Vektor[pos,(0,0,0)] → f(t) := $\sqrt{2} \sqrt{7 t^2 + 2 t + 4}$
l:=Linje[A, r] → ℓ : y = (2, 0, 2) + λ (-1, 3, 2)	f(t)=0 Løs: { t = -$\frac{1}{7}$ }
eller	f(-1/7) → $\frac{3}{7} \sqrt{42}$
pos(t):=Vektor[A]+r t → pos(t) := (2 - t, 3 t, 2 + 2 t)	

Eller som høyde i utspent parallelogram av ao og r:	ao*n/ n → $\frac{3}{5} \sqrt{10}$
ao:=Vektor[A,(0,0,0)] → ao := $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$	cp:=pos(t)-(0,0,z) → cp := $\begin{pmatrix} 2 - t \\ 3 t \\ 2 + 2 t - z \end{pmatrix}$
ao⊗r/ r → $\frac{3}{7} \sqrt{42}$	cp=k*n Løs: { {z = $\frac{12}{5}$, k = $\frac{3}{5}$, t = $\frac{1}{5}$ } }
vindskjeve linjer z-akse og linje:); C=(0,0,12/5)
n:=r⊗(0,0,1) → n := $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	

Oppgave 3

Ett plan α går gjennom $A = (3, 0, 0)$, $B = (1, 3, 1)$ og $C = (2, 2, 5)$.

- Vis at ligningen for planet α blir $13x + 9y - z - 39 = 0$
- Finn skjæringspunktet mellom planet og z-aksen.
- Finn volumet av pyramiden $ABCO$, der $O = (0, 0, 0)$.
- Finn en parameterfremstilling for planets skjæringslinje med xy -planet.

a) $\vec{AB} = [-2, 3, 1]$, $\vec{AC} = [-1, 2, 5]$

$$\text{Normalvektor: } \vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = [13, 9, -1]$$

$$\text{Ligning: } \vec{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow [x-3, y, z] \cdot [13, 9, -1] = 0 \Leftrightarrow 13x + 9y - z - 39 = 0$$

b) z-aksen: $x = y = 0 \Rightarrow z = -39$
): $S_z = (0, 0, -39)$

c) $\vec{AO} = [-3, 0, 0]$

Volum utspent av \vec{AO} , \vec{AB} og \vec{AC} (trekantet pyramide):

$$V = \frac{|\vec{AO} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC})|}{6} = \frac{|[-3, 0, 0] \cdot [13, 9, -1]|}{6} = \frac{13}{2}$$

d) xy-planet: $z = 0 \Rightarrow 13x + 9y - 39 = 0$

Enklest å velge y som parameter: $y = t \Rightarrow x = \frac{39-9y}{13} = 3 - \frac{9}{13}t$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 - \frac{9}{13}t \\ y = t \\ z = 0 \end{array} \right\}$$

Kan innføre ny parameter $s = \frac{t}{13}$ og får da isteden:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 - 9s \\ y = 13s \\ z = 0 \end{array} \right\}$$

(Alternativt, mer standard, men tungvindt:

$$\text{Retningsvektor for linje: } \vec{r} = \vec{r}_z \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ 13 & 9 & -1 \end{vmatrix} = [-9, 13, 0]$$

Punkt D i plan, som også ligger i xy -plan:

$$z = 0, y = 0 \text{ (Velger en enkel } y \text{)} \quad): D = (3, 0, 0)$$

$$\text{Punkt } D \text{ og } \vec{r} \text{ gir parameterfremstilling: } \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - 9s \\ y = 13s \\ z = 0 \end{array} \right\})$$

For *eksemplets* skyld tar jeg det også i GeoGebra CAS:

A:=(3,0,0) → A := (3, 0, 0)	n:=ab⊗ac → n := $\begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$ (x-3,y,z)*n=0 → 13 x + 9 y - z - 39 = 0 {L7, x = 0, y = 0} LØS: {{x = 0, y = 0, z = -39}} ao:=Vektor[A,(0,0,0)] → ao := $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
B:=(1,3,1) → B := (1, 3, 1)	
C:=(2,2,5) → C := (2, 2, 5)	
ab:=Vektor[A,B] → ab := $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	
ac:=Vektor[A,C] → ac := $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$	

ao*(ab⊗ac) /6 → $\frac{13}{2}$
Løs[L7,x] → $\left\{ x = -\frac{9}{13} y + \frac{1}{13} z + 3 \right\}$
ByttUt[L11,{z=0, y=t}] → $\left\{ x = -\frac{9}{13} t + 3 \right\}$
): Parameterfremstilling: {x=3-9/13 t, y=t, z=0}

Del II - Med hjelpemidler

Oppgave 4

Et plan α skjærer x -aksen i $A = (a, 0, 0)$, y -aksen i $B = (0, b, 0)$ og z -aksen i $C = (0, 0, c)$.

- Bestem arealet av trekanten ABC .
- Vis at en normalvektor til planet blir $[bc, ac, ab]$.
- Vis at ligningen for planet kan skrives $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$
- Bestem avstanden fra planet til origo, $O = (0, 0, 0)$.

Med GeoGebra CAS:

- Areal utspent av vektorer \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{AC} som vektorprodukt.
- Vektorproduktet i a) er også normalvektor til plan.

$$c) \vec{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

d) Prosjeksjon av \vec{AO} på normalvektor.

A:=(a,0,0) → A := (a, 0, 0)	$ abc /2$ $\rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}$ n:=abc $\rightarrow \mathbf{n} := \begin{pmatrix} b & c \\ a & c \\ a & b \end{pmatrix}$ $(x-a,y,z) \cdot \mathbf{n} = 0$ RegnUt: $-\mathbf{a} b c + \mathbf{a} b z + \mathbf{a} c y + \mathbf{b} c x = 0$ (Divisjon med abc gir ønsket svar.)
B:=(0,b,0) → B := (0, b, 0)	
C:=(0,0,c) → C := (0, 0, c)	
ab:=Vektor[A,B] → $\mathbf{ab} := \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$	
ac:=Vektor[A,C] → $\mathbf{ac} := \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$	
	ao:=Vektor[A,(0,0,0)] → $\mathbf{ao} := \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$ ao \cdot \mathbf{n} / \mathbf{n} $ $\rightarrow \frac{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} a b c }{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}$
Enklere:
$ abc / \sqrt{(a b)^2 + (a c)^2 + (b c)^2}$ $\rightarrow \frac{ abc }{\sqrt{(a b)^2 + (a c)^2 + (b c)^2}}$

Oppgave 5

Gitt en linje $l : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{array} \right\}$ og et punkt $A = (3, 4, 5)$.

Finn ligningen for et plan α gjennom linjen l som inneholder punktet A .

Med GeoGebra CAS:

Linjen har retningsvektor: $\vec{r} = [1, -1, 2]$ og punkt $B = (1, 2, 1)$

Lager vektor: \vec{AB} som også ligger i planet.

Normalvektor til planet ut fra: $\vec{AB} \times \vec{r}$

Punktet B og normalvektor gir da ligning:

A:=(3,4,5) → A := (3,4,5)	abør → $\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ Velger: n:=(2,0,-1) → n := $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (x-1,y-2,z-1)*n=0 → 2x - z - 1 = 0
B:=(1,2,1) → B := (1,2,1)	
r:=(1,-1,2) → r := $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$	
ab:=Vektor[A,B] → ab := $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$	

Oppgave 6

Gitt punktene $A = (5, 1, 2)$ og $B = (4, 5, 2)$.

Finn parameterfremstillingen for en linje l som går gjennom A , har avstanden 3 fra B og er parallell med yz -planet.

Med GeoGebra CAS:

Parallell med yz -plan betyr at det ikke er noen x -komponent i retningvektor;
 $\vec{r} = (0, 1, k)$

OBS: Lurt ikke å bruke to ukjente; $\vec{r} = (0, k, l)$, lengden er uviktig, så det er bare *forholdet* mellom y - og z -koordinat som er viktig!

Avstanden fra B til linjen som høyden i utspent parallelogram;

$$\frac{|\vec{AB} \times \vec{r}|}{|\vec{r}|} = 3$$

gir ligning med løsning $k = \pm 1$, som igjen gir parameterfremstillingen:

$$\vec{OP} = [x, y, z] = \vec{OA} + \vec{r} t = [5, 1, 2] + [0, 1, \pm 1]t = [5, 1 + t, 2 \pm t] \Leftrightarrow$$

$$\text{Linje: } \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 1 + t \\ z = 2 \pm t \end{array} \right.$$

$A := (5, 1, 2)$ $\rightarrow \mathbf{A} := (5, 1, 2)$	
$B := (4, 5, 2)$ $\rightarrow \mathbf{B} := (4, 5, 2)$	
$ab := \text{Vektor}[A, B]$ $\rightarrow \mathbf{ab} := \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	
$r := (0, 1, k)$ $\rightarrow \mathbf{r} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$	
	$ \mathbf{ab} \otimes \mathbf{r} / \mathbf{r} = 3$ $\rightarrow \frac{\sqrt{17k^2 + 1}}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3$ $\$5$ LØS: $\{\mathbf{k} = -1, \mathbf{k} = 1\}$

(Med $\vec{r} = [0, k, l]$ ville vi fått:

$$\frac{|\vec{AB} \times \vec{r}|}{|\vec{r}|} = 3 \Leftrightarrow \frac{|[-1, 4, 0] \times [0, k, l]|}{\sqrt{k^2 + l^2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{|[4l, l, -k]|}{\sqrt{k^2 + l^2}} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{16l^2 + l^2 + k^2}}{\sqrt{k^2 + l^2}} = 3 \Rightarrow \frac{17l^2 + k^2}{k^2 + l^2} = 9 \Leftrightarrow 8l^2 = 8k^2 \Leftrightarrow l = \pm k$$

): $\vec{r} = [0, k, \pm k] = k[0, 1, \pm 1]$, og her kan vi velge $k = 1$ og få $\vec{r} = [0, 1, \pm 1]$, da lengden av \vec{r} ikke spiller noen rolle.