Startoppgaver vektorregning

Løsningsskisser

Gitt punktene $A(1,1,2), B(3,4,5), C(2,5,4), D(4,8,7)$.
1) Finn avstanden fra C til Origo.
2) Finn $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.
3) Finn avstanden mellom A og B.
4) Finn summen $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ og differansen $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Hva er den geometriske tolkningen av disse?
5) Finn vinkelen mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.
6) Undersøk om CD er parallell med AB.
7) Finn arealet av trekanten ABC.

1) $\left|\overrightarrow{OC}\right| = \sqrt{2^2+5^2+4^2} = 3\sqrt{5} \approx 6.71$

2) $\overrightarrow{AB} = [3-1, 4-1, 5-2] = [2,3,3]$
$\overrightarrow{AC} = [2-1, 5-1, 4-2] = [1,4,2]$

3) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2+3^2+3^2} = \sqrt{22} \approx 4.69$
$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1^2+4^2+2^2} = \sqrt{21} \approx 4.58$

4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = [2,3,3] + [1,4,2] = [3,7,5]$
$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = [2,3,3] - [1,4,2] = [1,-1,1]$

Summen er en av diagonalene i parallellogrammet utspent av $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$,
differansen er den andre diagonalen i parallellogrammet utspent av $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

5) $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{[2,3,3]\cdot[1,4,2]}{\sqrt{22}\sqrt{21}} = \frac{2\cdot 1 + 3\cdot 4 + 3\cdot 2}{\sqrt{22}\sqrt{21}} = \frac{20}{\sqrt{22}\sqrt{21}} \approx 0.93048 \Rightarrow$
$\alpha \approx 21.49^\circ$

6) $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow [4-2, 8-5, 7-4] = k[2,3,3] \Leftrightarrow$
$[2,3,3] = k[2,3,3] \Leftrightarrow k = 1$

): $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$ QED

7) Tungvindt måte (hvis man ikke allerede har regnet ut α):
$ABC = \frac{gh}{2} = \frac{AB\cdot(AC\sin\alpha)}{2} = \frac{\sqrt{22}\sqrt{21}\sin 21.49^\circ}{2} \approx 3.94$

Det finnes en bedre formel som kan utledes slik:

$$ABC = \frac{AB\cdot(AC\sin\alpha)}{2} = \frac{AB\cdot AC}{2}\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 \cos^2\alpha}}{2} =$$

$$\frac{\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}}{2}$$

Ser komplisert ut, men lett å regne ut, dessuten får du eksakt svar:

$$\frac{\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}}{2} = \frac{\sqrt{22\cdot21-20^2}}{2} = \frac{\sqrt{62}}{2} \approx 3.94$$

Parallellogrammet utspent av $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ har selvfølgelig det dobbelte arealet:

$$\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

Dette er en fin formel, som ikke står i formelsamlingene, men som man har stor nytte av å kunne!