Vektor-produkt

Formål:
Sentrale gjøremål i romgeometrien er:
- Finne en normalvektor til to vektorer eller et plan.
- Finne arealer av trekanter og parallellogrammer utspent av to vektorer.
- Finne volumer av parallellepipeder utspent av tre vektorer.
- Finne avstander mellom linjer, linjer og punkt, ...

Den enkleste måten å gjøre disse tingene på er å bruke formler som benytter
en operasjon vi kaller ***vektor-produkt***.
Dessuten, de av dere som har fysikk møter vektorproduktet i elektrisitetslæren uansett.

OBS: Vektor-produkt er ikke det samme som skalarprodukt!

Innledning:

Vi har tre typer multiplikasjoner i forbindelse med vektorer:
- Multiplikasjon ***med et tall***: $[2,3,4]5 = [10,15,20]$
- ***Skalar***produkt: $[2,3,4] \cdot [3,-1,2] = 2 \cdot 3 + 3(-1) + 4 \cdot 2 = 11$
- ***Vektor***produkt: $[2,3,4] \times [3,-1,2] = [10,8,-11]$ (Skal vise hvordan vi finner $[10,8,-11]$ etter hvert.)

(Egentlig vil jeg si at skalarprodukt og vektorprodukt er ***operasjoner***, mer enn "produkter", men dette er navnene som brukes på disse to nyttige operasjonene.)

Legg merke til at vi har:
- vektor•tall=vektor
- vektor•vektor=tall
- vektor×vektor=vektor

Definisjonen av vektorprodukter har bakgrunn i et ønske om å ha en vektor som har disse egenskapene:
- Størrelsen skal være: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\alpha$ (der α er vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.)
  Dette er som kjent lik arealet av parallellogrammet utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$!
  Arealet kan som kjent også regnes ut som: $\sqrt{(|\vec{u}||\vec{v}|)^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$
- Vektorproduktet skal stå normalt på både $\vec{u}$ og $\vec{v}$; $\quad \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u} \wedge \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{u} \times \vec{v}$ skal utgjøre et "høyre-hånds-system", d.v.s. at de skal ha samme retninger som $x-$, $y-$ og $z-$aksen i et tredimensjonalt koordinatsystem.

Vektorproduktet regnes ut på denne litt merkelige måten:

$\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$ gir

vektorproduktet: $\quad \vec{u} \times \vec{v} = [y_1 z_2 - z_1 y_2, -(x_1 z_2 - z_1 x_2), x_1 y_2 - y_1 x_2]$

Dette ser jo komplisert ut, men følgende oppstilling gjør det enkelt å holde orden på utregningen:

$$\begin{array}{rcccc} \vec{u} & = & [x_1 & y_1 & z_1] \\ \vec{v} & = & [x_2 & y_2 & z_2] \\ \vec{u}\times\vec{v} & = & [y_1z_2 - z_1y_2, & -(x_1z_2 - z_1x_2), & x_1y_2 - y_1x_2] \end{array}$$

Denne oppstillingen er kanskje opphavet til navnet "kryss-produkt"!
Legg merke til hvordan vi foretar en *kryss*-multiplikasjon av de komponentene i $\vec{u}$ og $\vec{v}$ som ***står igjen*** når vi fjerner de komponentene som tilsvarer den komponenten vi regner på i vektorproduktet!
Dessuten, y - komponenten skal ha en ekstra minus!

Eksempel:

$[2,3,4]\times[3,-1,2]$:

$$\begin{array}{rcccc} \vec{u} & = & [2 & 3 & 4] \\ \vec{v} & = & [3 & -1 & 2] \\ \vec{u}\times\vec{v} & = & [3\cdot 2 - 4(-1), & -(2\cdot 2 - 4\cdot 3), & 2(-1) - 3\cdot 3] \end{array}$$

$$= [3\cdot 2 - 4(-1), -(2\cdot 2 - 4\cdot 3), 2(-1) - 3\cdot 3]$$

$$= [10, 8, -11]$$

Anvendelser:

Finne normalvektor til et plan ut fra to vektorer i planet.

Vi ser at $\vec{u}\times\vec{v} = [10,8,-11]$ står normalt på $\vec{u} = [2,3,4]$ og $\vec{v} = [3,-1,2]$
ved å teste med skalarpoduktene:

$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u} = [10,8,-11]\cdot[2,3,4] = 10\cdot 2 + 8\cdot 3 + (-11)4 = 0$
$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v} = [10,8,-11]\cdot[3,-1,2] = 10\cdot 3 + 8\cdot(-1) + (-11)2 = 0$

Finne arealet av et parallellogram utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$:

$AREAL = \left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = |[10,8,-11]| = \sqrt{10^2+8^2+11^2} = \sqrt{285}$

Vi ser at dette stemmer med formelen: $AREAL = \sqrt{(\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|)^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2} =$
$\sqrt{(\sqrt{29}\sqrt{14})^2 - (11)^2} = \sqrt{29\cdot 14 - 121} = \sqrt{285}$

Finne avstanden fra et punkt P til en linje med retningsvektor $\vec{r}$ og et punkt A:

Arealet utspent av retningsvektoren $\vec{r}$ og $\overrightarrow{AP}$ blir grunnlinje•høyde: $\left|\vec{r}\right|\cdot d = \left|\vec{r}\times\overrightarrow{AP}\right|$

og vi får formelen: $d = \frac{AREAL}{\left|\vec{r}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{r}\right|}{\left|\vec{r}\right|} = \frac{\sqrt{(\left|\overrightarrow{AP}\right|\left|\vec{r}\right|)^2 - (\overrightarrow{AP}\cdot\vec{r})^2}}{\left|\vec{r}\right|}$

Hvis $\overrightarrow{AP} = \vec{u} = [2,3,4]$ og $\vec{r} = \vec{v} = [3,-1,2]$
får vi :

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{r}\right|}{\left|\vec{r}\right|} = \frac{\sqrt{285}}{\sqrt{14}}$$

Bevis for koordinatformelen for vektorprodukt:

(For *spesielt* interesserte...)

$\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$ gir koordinatformelen:

$\vec{u} \times \vec{v} = [y_1 z_2 - z_1 y_2, -(x_1 z_2 - z_1 x_2), x_1 y_2 - y_1 x_2]$

Sjekk av om: $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ **og** $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = [y_1 z_2 - z_1 y_2, -(x_1 z_2 - z_1 x_2), x_1 y_2 - y_1 x_2] \cdot [x_1, y_1, z_1] =$$
$$x_1 y_1 z_2 - x_1 y_2 z_1 - x_1 y_1 z_2 + x_2 y_1 z_1 + x_1 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_1 = 0$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = [y_1 z_2 - z_1 y_2, -(x_1 z_2 - z_1 x_2), x_1 y_2 - y_1 x_2] \cdot [x_2, y_2, z_2] =$$
$$x_2 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_1 - x_1 y_2 z_2 + x_2 y_2 z_1 + x_1 y_2 z_2 - x_2 y_1 z_2 = 0$$

Sjekk av om: $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(|\vec{u}||\vec{v}|)^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$

For å slippe rottegn sjekker vi like godt: $(|\vec{u} \times \vec{v}|)^2 = (|\vec{u}||\vec{v}|)^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

Venstre side:

$$(|\vec{u} \times \vec{v}|)^2 = (y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (x_1 z_2 - z_1 x_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 =$$
$$y_1^2 z_2^2 - 2y_1 z_2 z_1 y_2 + z_1^2 y_2^2 + x_1^2 z_2^2 - 2x_1 z_2 z_1 x_2 + z_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 - 2x_1 y_2 y_1 x_2 + y_1^2 x_2^2 =$$
$$y_1^2 z_2^2 + z_1^2 y_2^2 + x_1^2 z_2^2 + z_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 - 2y_1 z_2 z_1 y_2 - 2x_1 z_2 z_1 x_2 - 2x_1 y_2 y_1 x_2$$

Høyre side:

$$(\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2})^2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 =$$
$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) =$$
$$x_1^2 x_2^2 + y_1^2 x_2^2 + z_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 y_2^2 + z_1^2 y_2^2 + x_1^2 z_2^2 + y_1^2 z_2^2 + z_1^2 z_2^2 -$$
$$(x_1^2 x_2^2 + y_1 y_2 x_1 x_2 + z_1 z_2 x_1 x_2 + x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 y_2^2 +$$
$$z_1 z_2 y_1 y_2 + x_1 x_2 z_1 z_2 + y_1 y_2 z_1 z_2 + z_1^2 z_2^2) =$$
$$y_1^2 x_2^2 + z_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + z_1^2 y_2^2 + x_1^2 z_2^2 + y_1^2 z_2^2 - 2y_1 y_2 x_1 x_2 - 2z_1 z_2 x_1 x_2 - 2z_1 z_2 y_1 y_2$$

Bortsett fra rekkefølge ser vi at ligningen er oppfyllt.

Dette illustrerer hvor genialt det er med vektorer!
Vektorer som begrep og notasjon sparer oss for denne type fryktelige utregninger.
Tenk om vi skulle gjort denne type utregninger i alle geometriske problemstillinger i 3 dimensjoner...