Eksempler på oppgaver og teknikker

Teknikker:

- Faktorisering og produktsetning. (*Ikke glem denne!*)
- Konjugatsetning
- Substitusjon (f.eks. $u = \tan x$ i andregradsligninger)
- Trigonometriske omforminger med:
  - $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
  - $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
  - $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
  - $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
  - $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

1) Faktorisering og produktregel:

$\sin(x)\cos(x) + \sin(x) = 0 \qquad , \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$
$\sin(x)(\cos(x) + 1) = 0 \qquad$ $\sin x$ felles faktor!
$\sin(x) = 0 \vee \cos(x) = -1$
$x = 0 \vee x = \pi$

2) Omforming av $\tan(x)$:

$\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} = 0 \qquad , \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$
$\frac{\sin(x)+1}{\cos(x)} = 0 \qquad$ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$!
$\cos(x) \neq 0$ gir:
$\sin(x) = -1$
Ingen løsning, da $x = \frac{3\pi}{2}$ gir $cos(x) = 0$

3) Omforming av $\tan x$ og fellesnevner:

$\tan^2(x) + \sin(x) = 0 \qquad , \qquad x \in [0^\circ, 360^\circ\rangle$
$\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin(x)\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = 0$
$\frac{\sin^2(x)+\sin(x)(1-\sin^2(x))}{\cos^2(x)} = 0$
$\frac{\sin^2(x)+\sin(x)-\sin^3(x)}{\cos^2(x)} = 0 \qquad$ Ikke multipliser ut før du har faktorisert!
$\frac{\sin(x)\left[-\sin^2(x)+\sin(x)+1\right]}{\cos^2(x)} = 0 \qquad$ $\sin x$ er felles faktor!
$\cos(x) \neq 0$ gir:
$\sin(x) = 0 \vee \sin(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee \sin(x) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
$x = 0^\circ \vee x = 180^\circ \vee x = 218^\circ \vee x = 322^\circ$

4) Omforming av $\tan x$, konjugatsetning:

$1 + \tan^2(x) = 4\sin^2(x) \qquad , \qquad x \in [0^\circ, 360^\circ\rangle$
$\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 4\sin^2(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 4\sin^2(x)$
$\cos(x) \neq 0$ gir:
$4\sin^2(x)\cos^2(x) - 1 = 0 \qquad$ Faktoriser med konjugatsetning!
$(2\sin(x)\cos(x) + 1)(2\sin(x)\cos(x) - 1) = 0$
$(\sin(2x) + 1)(\sin(2x) - 1) = 0$
$\sin(2x) = -1 \vee \sin(2x) = 1$
$2x = 180^\circ + k360^\circ \vee 2x = 90^\circ + k360^\circ$

$x = 90^\circ + k180^\circ \vee x = 45^\circ + k180^\circ$
$x = 45^\circ \vee x = 225^\circ$

5) Omforming med $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$:

$1 + \tan^2(x) = 4\sin^2(x) \quad , \quad x \in [0^\circ, 360^\circ\rangle$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 4\sin^2 x$
o.s.v. som i eksempel 4).

6) Omforminger med $\cos 2x$ og $\sin 2x$:

$\sin(2x) + 2\sin(x) = 0 \quad , \quad x \in [0, 2\pi\rangle$
$2\sin x\cos x + 2\sin x = 0$
$\sin x\cos x + \sin x = 0$
Videre som i eksempel 1).

7) Substitusjon:

$\tan^2 x - 3\tan x + 2 = 0, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$
$u^2 - 3u + 2 = 0, \quad u = \tan x$
$u = 1 \vee u = 2$
$\tan x = 1 \vee \tan x = 2$
$x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi 4}{4} \vee x = 1.11 \vee x = 1.11 + \pi = 4.25$

8) Omforming med $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$\sin^2 x - \cos^2 x - \frac{1}{2} = 0, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$
$\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) - \frac{1}{2} = 0$
$2\sin^2 x - \frac{3}{2} = 0$
$\sin^2 x = \frac{3}{4}$
$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}$

9) Omforming med $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos 2x + \cos x = 0, , \quad x \in [0, 2\pi\rangle$
$2\cos^2 x - 1 + \cos x = 0$
$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$
$2u^2 + u - 1 = 0$, Solution is: $-1, \frac{1}{2}$
$, \quad u = \cos x$
$u = -1 \vee u = \frac{1}{2}$
$\cos x = -1 \vee \cos x = \frac{1}{2}$
$x = \pi \vee x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}$

10) $a\sin^2 x + b\sin 2x + c\cos^2 x = 0$ og

$$a\sin^2 x + b\sin 2x + c\cos^2 x = d$$

$a\sin^2 x + \frac{b}{2}\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$

$\cos x \neq 0$ gir:
$a \tan^2 x + \frac{b}{2} \tan x + c = 0$ Dividerer med $\cos^2 x$.
Substitusjonen $u = \tan x$ ordner resten.

Med konstant på høyre side i ligningen gjør vi:
$a \sin^2 x + b \sin 2x + c \cos^2 x = d$
$a \sin^2 x + \frac{b}{2} \sin x \cos x + c \cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$
$(a - d) \sin^2 x + \frac{b}{2} \sin x \cos x + (c - d) \cos^2 x = 0$
$\cos x \neq 0$ gir:
$(a - d) \tan^2 x + \frac{b}{2} \tan x + (c - d) = 0$
Substitusjonen $u = \tan x$ ordner resten.