Kap 4 - Noen kommentarer til integralregning

Familier av funksjonstyper:

Polynom	$x, x^2, \ldots$
Eksponential	$5^x, e^{-3x}, \ldots$
Logaritme	$\lg(x), \ln(x), \ldots$
Trigonometriske	$\sin(x), \cos(x), \tan(x), \ldots$

Hvis vi har ***forskjellige*** familier representert i integralet (som produkt) ligger det an til ***delvis*** integrasjon:

Eksempler: $\int x\cos(x)dx, \int x^2\ln(x)dx, \int e^x\sin(x)dx, \ldots$

Hvis det er ***samme*** type funksjon, eller sammensatte funksjoner, ligger det an til ***substitusjonsmetoden***:
Eksempler: $\int \cos^2(x)\sin(x)dx, \int \sqrt{\tan(x)}\,\frac{1}{\cos^2(x)}dx, \ldots$

Substitusjonsmetoden/Integrasjon med variabelskifte:

Valg av u: Let etter en del av uttrykket som er *den deriverte av en annen del* av uttrykket:
$\int \cos^2(x)\sin(x)dx$
Her er $\sin(x)$ omtrent den deriverte av $\cos(x)$ (bortsett fra fortegn), altså:
$u = \cos(x)$
$\frac{du}{dx} = -\sin(x) \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin(x)}$
Setter inn u og dx (ikke rør resten):

$$\int u^2\sin(x)\frac{du}{-\sin(x)} = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3(x)}{3} + C$$

Kjerneregelen og derivasjon:

Kjerneregelen kan utvides i det uendelige...

$h(x) = \tan^2(2x) = u^2$ der $u = \tan(v)$ og $v = 2x$
$h'(x) = h'_u \cdot u'_v \cdot v'_x =$
$2u\frac{1}{\cos^2(v)}2 = 2\tan(2x)\frac{1}{\cos^2(2x)}2 = \frac{4\tan(2x)}{\cos^2(2x)}$

Tips om utpakking av funksjoner i.f.m. kjerneregelen:

Tenk først på hvordan du ville regne ut en funksjonsverdi:
$x \rightarrow 2() \rightarrow \tan() \rightarrow ()^2$

Går vi motsatt vei får vi:
$h(u) = u^2, \quad u = \tan(v), \quad v = 2x$

For å slippe substitusjon hver gang vi skal integrere $f(ax+b)$, merker vi oss den generelle regelen som ble oppgitt i kapittel 4.1:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C \text{ der } F'(x) = f(x).$$

Delvis integrasjon:

Valg av u og v:

Velg v lik en funksjon som blir enklere etter derivasjon, eksempelvis $x, x^2, \ldots$
som blir en grad lavere hver gang eller
$\ln(x)$, som har $\frac{1}{x} = x^{-1}$ som derivert, og $\frac{1}{x}$ kan ofte forkortes bort mot en annen x i x^n.

Tre viktige eksempler:

(Illustrerer de fleste tilfeller av delvis integrasjon som dere kan komme bort i.)

a) Polynomfunksjoner (x^n) blir enklere ved derivasjon og er derfor kandidater for v:

$$I = \int x \cdot \sin(x)dx$$

$$u' = \sin(x) \Rightarrow u = -\cos(x)$$
$$v = x \Rightarrow v = 1$$

gir:

$$I = -\cos(x)x - \int(-\cos(x))1dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)dx =$$
$$-x\cos(x) + \sin(x) + C$$

b) Logaritmefunksjoner blir enklere ved derivasjon og er derfor kandidater for v:

$$I = \int x^3 \ln(x)dx$$

$$u' = x^3 \Rightarrow u = \frac{x^4}{4}$$
$$v = \ln x \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$$

$$I = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx =$$
$$\frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

c) Eksponentialfunksjoner og trigonometriske funksjoner "gjentar seg" og vi må derfor gjøre delvis integrasjon i "to runder":

$$I = \int e^x \sin x(x)dx$$

Her spiller det ikke så stor rolle om du velger e^x eller $\cos(x)$ som v. (Prøv selv med $v = e^x$.)
Jeg velger

$$u' = e^x \Rightarrow u = e^x$$
$$v = \sin x \Rightarrow v' = \cos x$$

1) $I = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - I_2$

Så regner jeg ut I_2:

2) $$I_2 = e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + I$$

Så setter vi 2) inn i 1):

$$I = e^x \sin x - (e^x \cos x + I)$$

og løser m.h.p. I:

$$2I = e^x \sin x - e^x \cos x$$

$$I = \tfrac{1}{2} e^x \sin x - \tfrac{1}{2} e^x \cos x + C$$

θ