

Fagdag 03.12.2015 - CAS-trening

Innhold:

- Viktige kommandoer på side 1.
 - Eksempler på bruk av CAS side 1 - 4.
 - Arbeidsoppgaver på side 5 og utover.
-

Viktige kommandoer:

Se oversiktene side 444 og side 446 i læreboken i R1!

I Grafdelen:

*Nullpunkt[], Ekstremalpunkt[], Vendepunkt[],
Asymptote[], Tangent[], Linje[]*

Legg merke til at det er forskjellige varianter, avhengig av om man har polynomfunksjoner eller ikke.

Hvis ikke polynomfunksjoner, må man søke opp null- og ekstremalpunkter en og en i ved å angi passende intervaller.

I CAS-delen:

Tangent[], Linje[], Skjæring[], ...

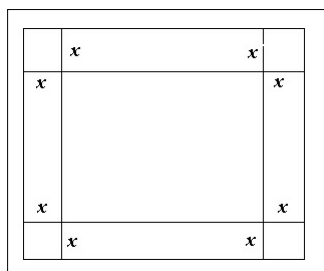
Generelt:

Definere funksjon, løse ligninger og ligningssystemer, løse ulikheter, utføre polynomdivisjon og faktorisering.

Eksempler på bruk av CAS:

Eksempel 1

Figuren viser en rektangulær papplade med lengde 50 cm og bredde 40 cm. Vi skal lage en boks av papplaten ved å brette opp kantene, slik at boksen får høyden x , slik figuren under viser:



Hvor stort volum får boksen når $x = 10$ cm?

Hva blir x når volumet er 4000 cm^3 ?
 Hvor høy må vi lage boksen for at den skal romme mest mulig?
 Hvor mange cm^3 rommer den da?

Forslag til løsning:

1	$V(x) = (50 - 2x)(40 - 2x)x$ <input checked="" type="radio"/> $\rightarrow V(x) := 4x^3 - 180x^2 + 2000x$	7	(22.64 forkastes, da dette er utenfor definisjonsmengden.)
2	$V(10)$ <input type="radio"/> $\rightarrow 6000$	8	$V((-5 \sqrt{21} + 45) / 3)$ <input type="radio"/> ≈ 6564.23
3	$V(x) = 4000$ <input type="radio"/> Løs: $\{x = 2.55, x = 13.55, x = 28.89\}$		
4	(28.89 forkastes, da dette er utenfor definisjonsmengde.)		
5	$V'(x) = 0$ <input type="radio"/> Løs: $\left\{ x = \frac{-5\sqrt{21} + 45}{3}, x = \frac{5\sqrt{21} + 45}{3} \right\}$		
6	$\{x = (-5 \sqrt{21} + 45) / 3, x = (5 \sqrt{21} + 45) / 3\}$ <input type="radio"/> $\approx \{x = 7.36, x = 22.64\}$		

Eksempel 2

Se eksempel 8 side 142 i læreboken i R1!
 Vi bruker $f(x) = k/x$ istedenfor $3/x$ for å gjøre det litt mer generelt.

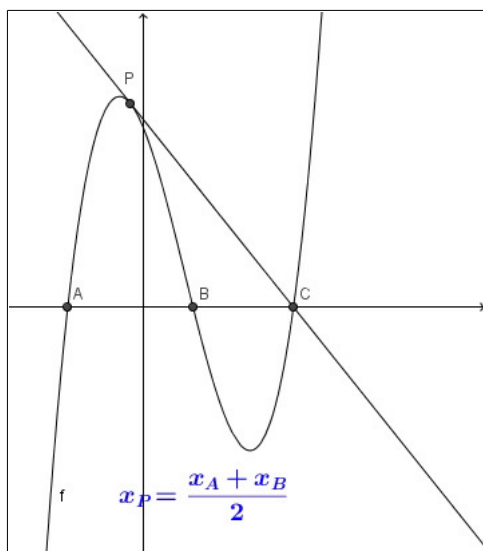
Løsningen bruker bokstaver og navn som i figuren i læreboken:

1	$f(x) = k/x$ $\rightarrow f(x) := \frac{k}{x}$	6	Bredde i trekanten: $b = OA$
2	$P = (a, f(a))$ <input type="radio"/> $\rightarrow P := \left(a, \frac{k}{a} \right)$	7	$t(x) = 0$ <input type="radio"/> Løs: $\{x = 2a\}$
3	$t(x) = \text{Tangent}[P, f]$ $\rightarrow t(x) := \frac{2ak - kx}{a^2}$	8	$b = 2a$ (Eller $b = \text{HøyreSide}[7,1]$) $\rightarrow b := 2a$
4	Høyde i trekanten: $h = OB = t(0)$	9	$\text{Areal}(a) = b \cdot h / 2$ $\rightarrow \text{Areal}(a) := 2k$
5	$h = t(0)$ $\rightarrow h := 2 \cdot \frac{k}{a}$		

Eksempel 3 - En klassisk CAS-oppgave:

Vi har en tredjegradsfunksjon med 3 nullpunkter A , B og C .
 Punktet P har x -koordinat midt mellom x -koordinatene til A og B .

Vis at en tangent til funksjonen gjennom P går gjennom det tredje nullpunktet slik som vist i figuren:

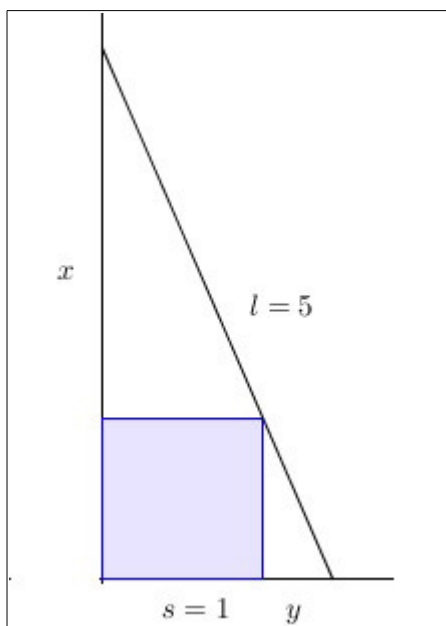


Lurere å definere $f(x) = a(x - x_A)(x - x_B)(x - x_C)$, uttrykt ved nullpunktene, enn den vanlige $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$!

1	$f(x) := a(x - x_A)(x - x_B)(x - x_C)$ $\rightarrow f(x) := a(-x_A + x)(-x_B + x)(-x_C + x)$
2	$x_P := (x_A + x_B) / 2$ $\rightarrow x_P := \frac{1}{2}(x_A + x_B)$
3	$P := (x_P, f(x_P))$ $\rightarrow P := \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{-a x_A^3 + a x_A^2 x_B + 2 a x_A^2 x_C + a x_A x_B^2 - 4 a x_A x_B x_C - a x_B^3 + 2 a x_B^2 x_C}{8} \right)$
4	$t(x) := \text{Tangent}[P, f]$ $\rightarrow t(x) := \frac{1}{4} a x_A^2 x_C - \frac{1}{4} a x_A^2 x + \frac{1}{4} a x_B^2 x_C - \frac{1}{4} a x_B^2 x - \frac{1}{2} a x_A x_B x_C + \frac{1}{2} a x_A x_B x$
5	$t(x) = 0$ <input type="radio"/> Løs: $\{x = x_C\}$

Konklusjon, vi ser at tangenten skjærer x -aksen for $x = x_C$, altså i det tredje nullpunktet!

Eksempel 4 - Stigeproblemet



Figuren viser en 5 meter lang stige som står opp mot en vegg og støtter seg på en kvadratisk kasse med sidekanter som er 1 meter lange.

Finn avstanden x fra kassen og opp til anleggspunktet mot vegg og avstanden y fra kassen og bort til anleggspunktet mot bakken.

Vi får ligningene:

I $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5^2$ (Pythagoras)

II $\frac{x}{1} = \frac{1}{y}$ (Formlikhet)

1	$(y+1)^2 + (x+1)^2 = 25$ <input type="radio"/> $\rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 25$
2	$x/1 = 1/y$ <input type="radio"/> $\rightarrow x = \frac{1}{y}$
3	$\{\$1, \$2\}$ <input type="radio"/> Løs: $\{x = 3.84, y = 0.26\}, \{x = -5.93, y = -0.17\}, \{x =$

Vi får løsningen $x = 3.84$ og $y = 0.26$ eller omvendt. (Negative løsninger forkastes.)

Tips:

Her kan du merke linje 1 og linje 2 med musen og klikke på , så slipper du å taste inn $\{\$1, \$2\}$!

Arbeidsoppgaver

Oppgave 1

En bonde har et 20 meter langt gjerde og skal sperre av et rektangulært område der en av sidene i rektangelet er en fjøsvegg. Finn maksimalt areal som kan lages med dette gjerdet.

Oppgave 2

En likebenet trekant ABC inneholder et rektangulært område $DEFG$, der siden DE ligger på AB og hjørnene F og G ligger på de like sidene AC og BC i trekanten.

Trekanten har høyden h og grunnlinje $g = AB$.
Rektanglet har grunnlinje $x = DE$ og høyde $y = EF = DG$.

Bruk likeformede trekanter til å vise at: $\frac{h-y}{h} = \frac{x}{g}$
og at arealet av rektangelet blir: $Areal(x) = hx - \frac{h}{g}x^2$

Bruk CAS til å finne den største verdien arealet kan få uttrykt ved h og g .

Oppgave 3

Funksjonen $f(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2}$

Finn toppunktet.

Finn ligningen for tangenten til grafen der $x = 1$.

Finn ligningen for en annen tangent som er parallell med den første tangenten og bestem det andre tangeringspunktet.

Oppgave 4

Gitt funksjonen $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 4x - 2$

Bestem konstanten a når $f(x)$ har bunnpunkt for $x = 2$.

Oppgave 5

Se figuren i oppgave 4.38 i læreboken!

Det ser ut som om tangentene til punktene A og B skjærer hverandre i et punkt som har x -koordinat midt mellom A og B !

Definer en generell parabel $f(x) = ax^2 + bx + c$ og to punkter

$P = (p, f(p))$ og $Q = (q, f(q))$ på parabelen.

Bevis at skjæringspunktet S mellom tangentene til $f(x)$ gjennom P og Q har x -koordinat midt mellom x -koordinatene til P og Q . (Altså at $x_S = \frac{p+q}{2}$)

Oppgave 6

Oppgave 4.67 side 152 i læreboken:

Funksjonen $f(x)$ er gitt ved $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 1$.

Grafen til $f(x)$ har et bunnpunkt $(2, f(2))$ og en tangent med stigningstall -3 for $x = -1$.

Bruk CAS til å bestemme de eksakte verdiene av b og c .

Oppgave 7

Fra oppgave 4 i eksamen R1 høsten 2015:

Funksjonen $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

En linje l går gjennom punktene $(s, g(s))$ og $(t, g(t))$.

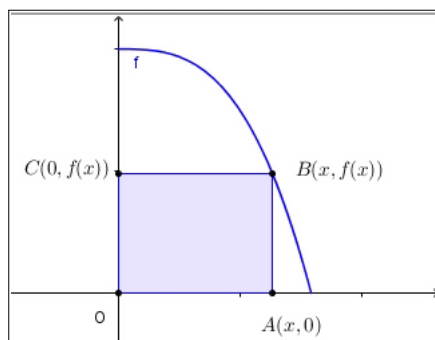
- Bruk CAS til å bestemme ligningen for linjen l , uttrykt ved s, t, a, b og c .
- Bruk CAS til å bestemme x -koordinaten til det tredje skjæringspunktet mellom grafen til g og linjen l .
- Bestem summen av x -koordinatene til de tre skjæringspunktene.

Oppgave 8

Fra oppgave 3 i eksamen R1 høsten 2015:

På figuren nedenfor ser du grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 4 - \frac{x^3}{8}, \quad 0 < x < 2\sqrt[3]{4}$$



Rektangelet $OABC$ er laget slik at B ligger på grafen til f .

- Vis at arealet G til rektangelet kan skrives som

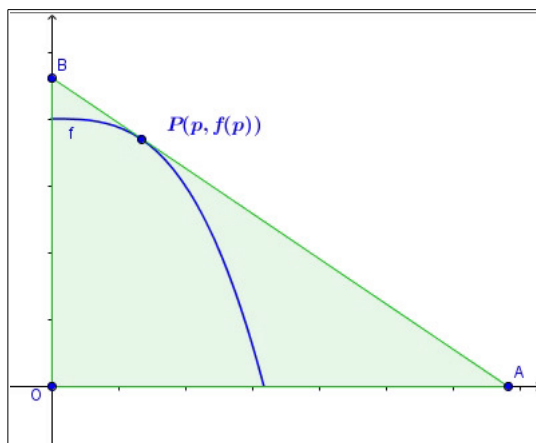
$$G(x) = 4x - \frac{x^4}{8}$$

- Bestem x slik at rektangelet får areal lik 5.
- Bestem det største arealet rektangelet kan ha.

Oppgave 9

På figuren nedenfor ser du grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 4 - \frac{x^3}{8}, \quad 0 < x < 2\sqrt[3]{4}$$



Vi har et punkt $P = (p, f(p))$ på $f(x)$. Tangenten til $f(x)$ gjennom P skjærer y -aksen i B og x -aksen i A .
Når vi flytter på P vil arealet av trekanten OAB variere.

a) Vis at arealet G til trekanten kan skrives som

$$G(p) = \frac{(p^3+16)^2}{12p^2} = \frac{p^6+32p^3+256}{12p^2}$$

b) Bestem p når arealet av trekanten er minst.

Oppgave 10

Se oppgave 4.35 i læreboken i R1:

Funksjonen h er gitt ved $h(x) = x^3 - 2x + k$, der $k \in \mathbb{R}$.

Grafen til $h(x)$ har en tangent med ligning $y = x + 5$.

- Bruk CAS til å bestemme mulige verdier av k .
- Kontroller resultatet i oppgave a) med graftegner.

Oppgave 11

Vi har to punkter P og Q på en parabel. Hvor må et punkt M ligge på parabellen for at tangenten til parabellen gjennom M har samme stigningstall som korden gjennom P og Q ?

Oppgave 12

Vis at forholdet mellom stigningstallet til vendetangenten og en linje gjennom topp- og bunnpunkt er $\frac{3}{2}$ i grafen til et en tredjegradsfunksjon.

Oppgave 13

Vi har en linje l gjennom vendepunktet V til en tredjegradsfunksjon $f(x)$ som skjærer grafen i to andre punkter A og B .

Vi definerer et punkt T på $f(x)$ som har x -koordinat midt mellom A og V .
Vis at tangenten til grafen til $f(x)$ gjennom T går gjennom B .