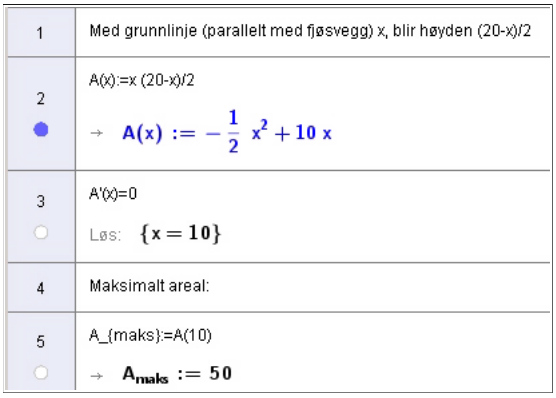
Løsningsskisser til arbeidsoppgaver i CAS.

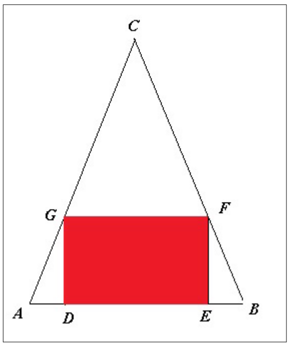
Oppgave 1

En bonde har et 20 meter langt gjerde og skal sperre av et rektangulært område der en av sidene i rektangelet er en fjøsvegg. Finn maksimalt areal som kan lages med dette gjerdet.



Oppgave 2

En likebenet trekant ABC inneholder et rektangulært område $DEFG$, der siden DE ligger på AB og hjørnene F og G ligger på de like sidene BC og AC i trekanten.



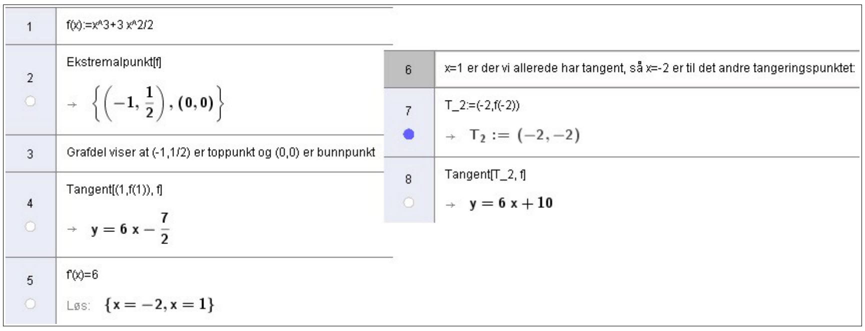
Trekanten har høyden h og grunnlinje $g = AB$.
Rektanglet har grunnlinje $x = DE$ og høyde $y = EF = DG$.

Bruk likeformede trekanter til å vise at: $\frac{h-y}{h} = \frac{x}{g}$
og at arealet av rektangelet blir: $Areal(x) = hx - \frac{h}{g}x^2$

Bruk CAS til å finne den største verdien arealet kan få uttrykt ved h og g.

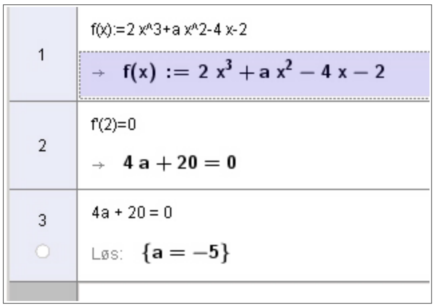
Oppgave 3

Funksjonen $f(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2}$
Finn toppunktet.
Finn ligningen for tangenten til grafen der $x = 1$.
Finn ligningen for en annen tangent som er parallell med den første tangenten og bestem det andre tangeringspunktet.



Oppgave 4

Gitt funksjonen $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 4x - 2$
Bestem konstanten a når $f(x)$ har bunnpunkt for $x = 2$.



Oppgave 5

Se figuren i oppgave 4.38 i læreboken!

Det ser ut som om tangentene til punktene A og B skjærer hverandre i et punkt som har x-koordinat midt mellom A og B!

Definer en generell parabel $f(x) = ax^2 + bx + c$ og to punkter $P = (p, f(p))$ og $Q = (q, f(q))$ på parabelen.
Bevis at skjæringspunktet S mellom tangentene til $f(x)$ gjennom P og Q har x-koordinat midt mellom x-koordinatene til P og Q. (Altså at $x_S = \frac{p+q}{2}$)

1	f(x):=a x^2+b x+c → $\mathbf{f(x) := a\,x^2 + b\,x + c}$
2	P:=(p,f(p)) → $\mathbf{P := \left(p, a\,p^2 + b\,p + c\right)}$
3	Q:=(q,f(q)) → $\mathbf{Q := \left(q, a\,q^2 + b\,q + c\right)}$
4	T_P(x):=Tangent[P, f] → $\mathbf{T_P(x) := -a\,p^2 + 2\,a\,p\,x + b\,x + c}$
5	T_Q(x):=Tangent[Q, f] → $\mathbf{T_Q(x) := -a\,q^2 + 2\,a\,q\,x + b\,x + c}$
6	T_P(x)=T_Q(x) Løs: $\mathbf{\left\{x = \frac{1}{2}\,p + \frac{1}{2}\,q\right\}}$

(I linje 6 kunne vi alternativt ha skrevet: **S:= Skjæring[T_P,T_Q]**, men ville da også fått med y-koordianten til skjæringspunktet: $\mathbf{S:=\{(\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q, apq+\frac{1}{2}bp+\frac{1}{2}bq+c)\}}$)

Oppgave 6

Oppgave 4.67 side 152 i læreboken:

> Funksjonen $f(x)$ er gitt ved $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 1$.
> Grafen til $f(x)$ har et bunnpunkt $(2, f(2))$ og en tangent med stigningstall -3 for $x = -1$.
>
> Bruk CAS til å bestemme de eksakte verdiene av b og c.

1	f(x):=x^3+b x^2+c x+1 → $\mathbf{f(x) := x^3 + b\,x^2 + c\,x + 1}$
2	f'(2)=0 → $\mathbf{4\,b + c + 12 = 0}$
3	f'(-1)=-3 → $\mathbf{-2\,b + c + 3 = -3}$
4	{$2, $3} Løs: $\mathbf{\{\{b = -1, c = -8\}\}}$

Oppgave 7

Fra oppgave 4 i eksamen R1 høsten 2015:

> Funksjonen $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
> En linje l går gjennom punktene $(s, g(s))$ og $(t, g(t))$.
> a) Bruk CAS til å bestemme ligningen for linjen l, uttrykt ved s, t, a, b og c.
> b) Bruk CAS til å bestemme x-koordinaten til det tredje skjæringspunktet mellom grafen til g og linjen l.
> c) Bestem summen av x-koordinatene til de tre skjæringspunktene.

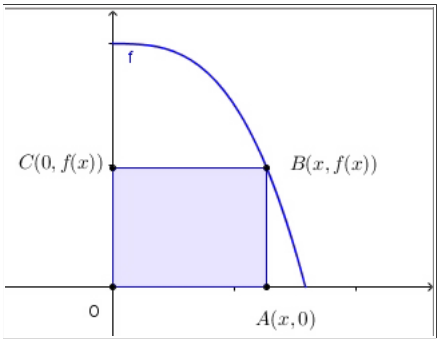
1	g(x):=x^3+a x^2+b x+c $\rightarrow$ $g(x) := x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$
2	S:=(s,g(s)) $\rightarrow$ $S := (s, a\,s^2 + b\,s + c + s^3)$
3	T:=(t,g(t)) $\rightarrow$ $T := (t, a\,t^2 + b\,t + c + t^3)$
4	l(x):=Linje[S, T] $\rightarrow$ $l(x) := -s\,t^2 + x\,(s^2 + t^2 + a\,s + a\,t + s\,t + b) - s^2\,t - a\,s\,t + c$
5	l(x)=g(x) Løs: $\{x = s, x = t, x = -a - s - t\}$
6	x=s og x=t tilhører punktene S og T. x=-a-s-t er x-koordinaten til det tredje skjæringspunktet
7	s+t+(-a-s-t) $\rightarrow$ $-a$

Oppgave 8

Fra oppgave 3 i eksamen R1 høsten 2015:

På figuren nedenfor ser du grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 4 - \frac{x^3}{8}, \qquad 0 < x < 2\sqrt[3]{4}$$



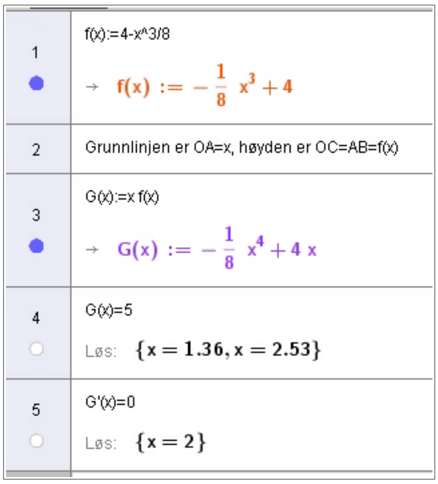
Rektangelet $OABC$ er laget slik at B ligger på grafen til f.

a) Vis at arealet G til rektangelet kan skrives som

$$G(x) = 4x - \frac{x^4}{8}$$

b) Bestem x slik at rektangelet får areal lik 5.

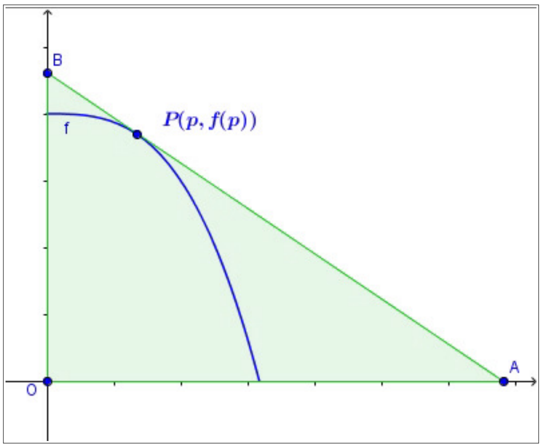
c) Bestem det største arealet rektangelet kan ha.



Oppgave 9

På figuren nedenfor ser du grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 4 - \frac{x^3}{8}, \qquad 0 < x < 2\sqrt[3]{4}$$



Vi har et punkt $P = (p, f(p))$ på $f(x)$. Tangenten til $f(x)$ gjennom P skjærer y-aksen i B og x-aksen i A.
Når vi flytter på P vil arealet av trekanten OAB variere.

a) Vis at arealet G til trekanten kan skrives som

$$G(p) = \frac{(p^3+16)^2}{12p^2} = \frac{p^6+32p^3+256}{12p^2}$$

b) Bestem p når arealet av trekanten er minst.

1	f(x):=4-x^3/8 $\rightarrow\ f(x) := -\frac{1}{8}x^3 + 4$
2	P:=(p,f(p)) $\rightarrow\ P := \left(p, \frac{-p^3+32}{8}\right)$
3	t(x):=Tangent[P, f] $\rightarrow\ t(x) := \frac{1}{4}p^3 - \frac{3}{8}p^2 x$ -
4	Høyde: h=OB=t(0)
5	h:=t(0) $\rightarrow\ h := \frac{1}{4}p^3 + 4$
6	Grunnlinje: g=OA gitt av t(x)=0
7	t(x)=0
8	g:=HøyreSide[$7,1] $\rightarrow\ g := \frac{2p^3+32}{3p^2}$
9	G(p):=g*h/2 $\rightarrow\ G(p) := \frac{p^6+32p^3+256}{12p^2}$
10	G'(p)=0 Løs: $\{p = -2\sqrt[3]{2}, p = 2\}$
11	Negativ løsning forkastes. Minimalt areal blir:
12	G_{min}:=G(2) $\rightarrow\ G_{min} := 12$

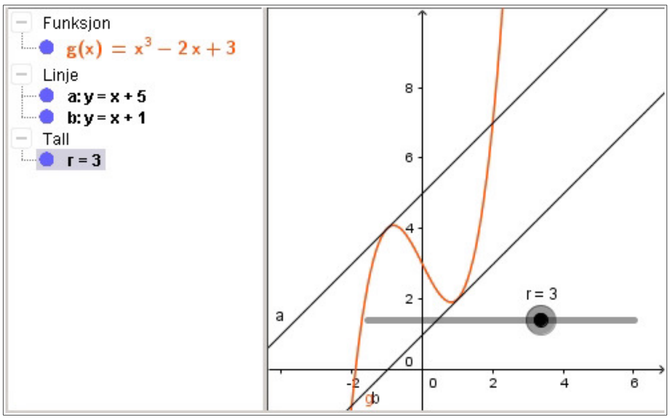
Oppgave 10

Se oppgave 4.35 i læreboken i R1:

Funksjonen h er gitt ved $h(x) = x^3 - 2x + k$, der $k \in \mathbb{R}$.
Grafen til $h(x)$ har en tangent med ligning $y = x + 5$.
a) Bruk CAS til å bestemme mulige verdier av k.
b) Kontroller resultatet i oppgave a) med graftegner.

1	h(x):=x^3-2 x+k $\rightarrow\ h(x) := x^3 + k - 2x$
2	Tangent har stigningstall 1:
3	h'(x)=1 Løs: $\{x = -1, x = 1\}$
4	T1(x):=Tangent[(-1,h(-1)), h] $\rightarrow\ T1(x) := k + x + 2$
5	T2(x):=Tangent[(1,h(1)), h] $\rightarrow\ T2(x) := k + x - 2$
6	Vi ser at k må være enten 3 eller 7 for at T1 eller T2 skal bli lik y=x+5

I grafdelen kan vi definere funksjonen (med et nye navn på h og k) for eksempel $g(x) = x^3 - 2x + r$, der r er en glider.
(Nye navn for ikke å forstyrre utregningene i CAS-delen!
Kan eventuelt lage en ny GeoGebra-fil.)
Definerer to tangenter: Tangent[(-1,g(-1)),g] og Tangent[(1,g(1)),g].
Ser da i algebravinduet at en av tangentene blir $y = x + 5$ hvis glideren r er på enten 3 eller 7.



Oppgave 11

Vi har to punkter P og Q på en parabel. Hvor må et punkt M ligge på parabelen for at tangenten til parabelen gjennom M har samme stigningstall som korden gjennom P og Q?

1	→ $f(x) := a\,x^2 + b\,x + c$
2	P:=(p,f(p)) → $P := \left(p, a\,p^2 + b\,p + c\right)$
3	Q:=(q,f(q)) → $Q := \left(q, a\,q^2 + b\,q + c\right)$
4	l(x):=Linje[P, Q] → $l(x) := x\,(a\,p + a\,q + b) - a\,p\,q + c$
5	st:=a p+a q+b → $st := a\,p + a\,q + b$ (Kunne derivert: st:=l'(x) , istedenfor å kopiere stigningtallet manuelt.)
6	f'(x)=a p+a q+b Løs: $\left\{x = \frac{1}{2}\,p + \frac{1}{2}\,q\right\}$
7	Vi ser at en tangent med samme stigningstall som linjen må ha x-koordinat midt mellom P og Q.

Oppgave 12

Vis at forholdet mellom stigningstallet til vendetangenten og en linje gjennom topp- og bunnpunkt er $\frac{3}{2}$ i grafen til et en tredjegradsfunksjon.

1	f(x):=a x^3+b x^2+c x+d $\rightarrow\ f(x) := a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$
2	Finner x-koordinat til vendepunktet V:{x = (-b) / (3a)}
3	f''(x)=0 Løs: $\left\{x = -\frac{b}{3\,a}\right\}$
4	x_V:=HøyreSide[$3,1] $\rightarrow\ x_V := -\frac{b}{3\,a}$
5	V:=(x_V,f(x_V)) $\rightarrow\ V := \left(-\frac{b}{3\,a}, \frac{27\,a^2\,d - 9\,a\,b\,c + 2\,b^3}{27\,a^2}\right)$
6	vt(x):=Tangent[V, f] $\rightarrow\ vt(x) := \frac{-9\,a\,b^2\,x + 27\,a^2\,c\,x - b^3 + 27\,a^2\,d}{27\,a^2}$
7	Stigningstall til vendetangenten taes enklest ut som den deriverte:
8	st_v:=vt'(x) $\rightarrow\ st_v := \frac{-b^2 + 3\,a\,c}{3\,a}$
9	f'(x)=0 Løs: $\left\{x = \frac{\sqrt{-3\,a\,c + b^2} - b}{3\,a}, x = \frac{-\sqrt{-3\,a\,c + b^2} - b}{3\,a}\right\}$
10	x_1:=HøyreSide[$9,2] $\rightarrow\ x_1 := \frac{-\sqrt{-3\,a\,c + b^2} - b}{3\,a}$
11	x_2:=HøyreSide[$9,1] $\rightarrow\ x_2 := \frac{\sqrt{-3\,a\,c + b^2} - b}{3\,a}$

12	E1:=(x_1,f(x_1)) $\rightarrow\ E1 := \left(\frac{-b - \sqrt{-3\,a\,c + b^2}}{3\,a}, \frac{27\,a^2\,d - 9\,a\,b\,c - 6\,a\,c\,\sqrt{-3\,a\,c + b^2} + 2\,b^3 + 2\,b^2\,\sqrt{-3\,a\,c + b^2}}{27\,a^2}\right)$
13	E2:=(x_2,f(x_2)) $\rightarrow\ E2 := \left(\frac{-b + \sqrt{-3\,a\,c + b^2}}{3\,a}, \frac{27\,a^2\,d - 9\,a\,b\,c + 6\,a\,c\,\sqrt{-3\,a\,c + b^2} + 2\,b^3 - 2\,b^2\,\sqrt{-3\,a\,c + b^2}}{27\,a^2}\right)$
14	l(x):=Linje[E1, E2] $\rightarrow\ l(x) := \frac{-2\,b^2\,x + 6\,a\,c\,x + 9\,a\,d - b\,c}{9\,a}$
15	Vi tar ut stigningstallet til linjen som den deriverte:
16	st_l:=l'(x) $\rightarrow\ st_l := \frac{-2\,b^2 + 6\,a\,c}{9\,a}$
17	st_v / st_l $\rightarrow\ \frac{3}{2}$

Oppgave 13

Vi har en linje l gjennom vendepunktet V til en tredjegradsfunksjon $f(x)$ som skjærer grafen i to andre punkter A og B.
Vi definerer et punkt T på $f(x)$ som har x-koordinat midt mellom A og V.
Vis at tangenten til grafen til $f(x)$ gjennom T går gjennom B.

1	f(x):=a x^3+b x^2+c x+d $\rightarrow\ f(x) := a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$
2	f''(x)=0 Løs: $\left\{x = -\frac{b}{3\,a}\right\}$
3	x_V:=HøyreSide[$2,1] $\rightarrow\ x_V := -\frac{b}{3\,a}$
4	V:=(x_V,f(x_V)) $\rightarrow\ V := \left(-\frac{b}{3\,a}, \frac{27\,a^2\,d - 9\,a\,b\,c + 2\,b^3}{27\,a^2}\right)$
5	A:=(a,f(a)) $\rightarrow\ A := \left(a, a^4 + a^2\,b + a\,c + d\right)$
6	l(x):=Linje[A, V] $\rightarrow\ l(x) := x\,\frac{9\,a^4 + 6\,a^2\,b - 2\,b^2 + 9\,a\,c}{9\,a} + \frac{1}{3}\,a^2\,b + \frac{2}{9}\,b^2 + d$
7	l(x)=f(x) Løs: $\left\{x = a, x = \frac{-3\,a^2 - 2\,b}{3\,a}, x = -\frac{b}{3\,a}\right\}$
8	x_B:=HøyreSide[$7,2] $\rightarrow\ x_B := \frac{-3\,a^2 - 2\,b}{3\,a}$
9	x_T:=(a+x_V)/2 $\rightarrow\ x_T := \frac{3\,a^2 - b}{6\,a}$

10	T:=(x_T,f(x_T)) → $\mathbf{T} := \left(\frac{3a^2-b}{6a}, \frac{27a^6+27a^4b+108a^3c-27a^2b^2+216a^2d-36abc+5b^3}{216a^2}\right)$
11	t(x):=Tangent[T, f] → $\mathbf{t(x)} := \frac{-27a^6+81a^5x+54a^3bx+9a^2b^2-27ab^2x+108a^2cx-2b^3+108a^2d}{108a^2}$
12	t(x)=f(x) Løs: $\left\{x = \frac{3a^2-b}{6a}, x = \frac{-3a^2-2b}{3a}\right\}$
13	Vi ser at at den andre x-koordinaten i listen er x-koordinaten til punktet B.
