CAS-Oppgaver:

Legg merke til resultatene, flere av dem er nyttige og verdt å huske!

Oppgave 1

Gitt funksjonen: $f(x) = ax^3 - bx - 2$
Funksjonen har toppunkt $TP = (2,f(2))$.
Tangenten gjennom punktet $(1,f(1))$ har stigningstall 2.

Bestem a og b i funksjonsuttrykket.

Oppgave 2

Et rett prisme med sidekanter a, b og c.
Volumet er 200, diagonalen inne i prismet er 141 og overflaten er 220.

a) Vis at dette gir ligningssystemet

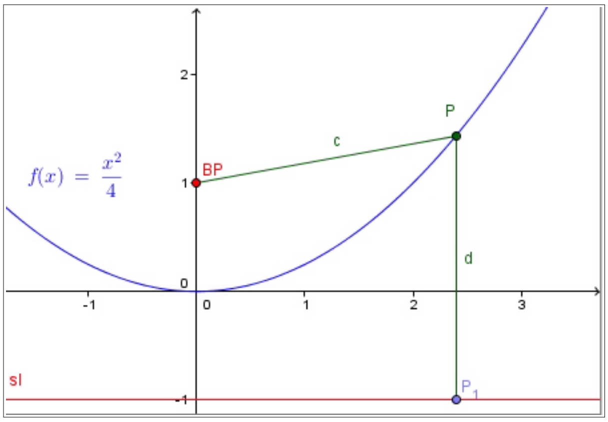
$$\left[\begin{array}{c} abc = 200 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 141 \\ ab + bc + ca = 110 \end{array}\right]$$

b) Bruk CAS til å bestemme sidelengdene a, b og c.

Egenskaper til parabelen/andregradsfunksjonen:

Parabelen $f(x) = ax^2$ har det såkalte *brennpunktet* i $BP = (0, \frac{1}{4a})$
og den såkalte styrelinjen ligger slik: $sl : \quad y = -\frac{1}{4a}$

Den *geometriske* definisjonen av parabel er at avstanden,c,
fra BP til et punkt P på parabelen er lik avstanden, d, fra P til styrelinjen sl.
I figuren under er altså $c = d$ og avstanden mellom BP og sl er $\frac{1}{2a}$:



Oppgave 1: Geometrisk definisjon

Gitt en generell parabel: $f(x) = ax^2 + bx + c$
Da ligger brennpunktet BP $\frac{1}{4a}$ over bunnpunktet;
$BP = (-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}) + \frac{1}{4a}))$
og styrelinjen $\frac{1}{4a}$ under bunnpunktet;
$sl: \; g(x) = f(-\frac{b}{2a}) - \frac{1}{4a})$

Bruk CAS til å vise at et punkt $P(p, f(p))$ på $f(x)$ ligger like langt fra BP som fra sl.

Oppgave 2: Symmetri

Vis at grafen til en andregradsfunksjon er symmetrisk om linjen $x = -\frac{b}{2a}$ gjennom bunnpunktet $B = (-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$.

Oppgave 3: Skjæring mellom to tangenter

Vis at skjæringspunktet S mellom to tangenter til en parabel har x-koordinat midt mellom x-koordinatene til tangeringspunktene.

Oppgave 4: Når står to tangenter normalt på hverandre

En parabel har to tangenter som tangerer i tangeringspunktene P og Q.
Vis at hvis PQ går gjennom brennpunktet, så står tangentene normalt på hverandre.

Oppgave 5: Tangenter og korder med samme stigningstall

Vi har to punkter P og Q på en parabel. Hvor må et punkt M ligge for at tangenten til parabelen gjennom M har samme stigningstall som korden gjennom P og Q?

Oppgave 6: Arkimedes arealformel

Vi har igjen en korde mellom to punkter P og Q på en parabel.
Vi har et punkt M som har x-koordinat midt mellom P og Q.
Vis at arealet av parabelsektoren, arealet mellom parabelen og korden PQ, er $\frac{4}{3}$ av arealet til trekanten APM.

Oppgave 7: Trekant mellom korde og tangent

Vi har igjen en korde mellom to punkter P og Q på en parabel.
Vi har et punkt M som har x-koordinat midt mellom P og Q.
Vi har et annet punkt N midt på PQ og et skjæringspunkt S mellom tangentene gjennom P og Q.
Vis at arealet av trekanten PQS er dobbelt så stort som arealet av trekanten PQM.
(Hint: Egentlig nok å vise at $NM = MS$.)

Egenskaper til tredjegradsfunksjoner

Oppgave 8: Stigningstall til vendetangent og korde

Vis at forholdet mellom stigningstallet til vendetangenten og en korde gjennom topp- og bunnpunkt er $\frac{3}{2}$.

Oppgave 9: Skjæringspunkter med skrålinje gjennom vendepunkt

Vi har en linje l gjennom vendepunktet V som skjærer en tredjegradsfunksjon $f(x)$ i to andre punkter A og B.
Vi definerer et punkt T på $f(x)$ som har x-koordinat midt mellom A og V.
Vis at tangenten til grafen til $f(x)$ gjennom T går gjennom B.