CAS teknikker

Innledning

Våren 2015 gjelder *nye* regler for bruk av digitale hjelpemidler:

- Når det står "Bruk CAS", så *må* kandidaten bruke CAS,
  og når det står "Bruk graftegner", så *må* kandidaten bruke graftegner!
- En kandidat blir *trukket* hvis han ikke bruker CAS når det blir bedt om det!
  (Selv om kandidaten gjør noe helt genialt og enklere som gjør bruk av CAS unødvendig!)

(Dette er egentlig i direkte strid med kunnskapsmålene i den generelle delen av læreplanen, der det står at eleven skal vise kompetanse i å *velge* riktige hjelpemidler.
Vi har altså ikke lenger metodefrihet...)
Udirs eksempeloppgaver ligger her:
https://pgsf.udir.no/dokumentlager/
DokumenterAndrekataloger.aspx?proveType=EV&periode=V-2014

I Katalog velger du: Ny eksamensordning i matematikk våren 2015

I Periode velger du: Alle

Så velger du fil. (Passordet er "Eksempel".)

Ut fra eksempeloppgavene anser jeg det som viktig å se litt på del teknikker og eksempler/oppgaver som kan være til nytte når man løser "CAS-oppgaver" på eksamen.

Teknikker

Flytting av funksjoner i koordinatsystemet:

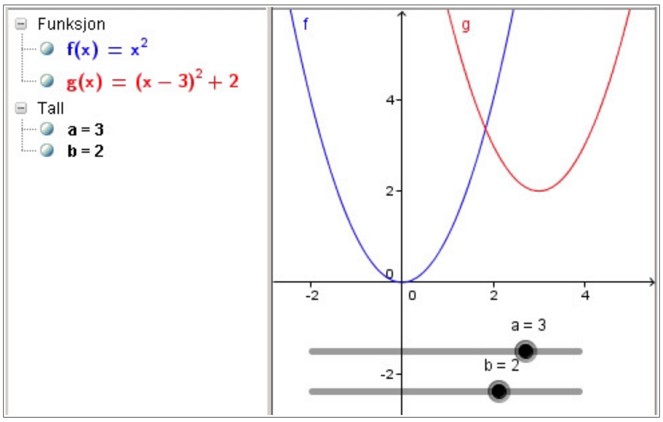
Har vi et funksjonsuttrykk $f(x)$, og a og b er positive tall, så vil:
$f(x-a)$ ha samme utseende, men være forskjøvet a mot *høyre*, langs positiv x-akse
$f(x)+a$ ha samme utseende, men være forskjøvet b *oppover* langs positiv y-akse.

Eksempel/eksperiment:

$f(x) = x^2$ med bunnpunkt i Origo, vil forskjøvet slik at den får bunnpunkt i $(3,2)$ bli:
$g(x) = f(x-3)+2 = (x-3)^2+2 = x^2-6x+11$

Lag $f(x) = x$^2 og $g(x) = f(x-a)+b$, der a og b er glidere i Ggb og eksperimenter med gliderne:

Verktøylinjeikon	Kommando	Verdi
		$f(x) = x^2$
a = 2		a = 3
a = 2		b = 2
	g(x) = f(x - a) + b	$g(x) = (x - 3)^2 + 2$



Eller vist med Ggb CAS for en generell andregradsfunksjon:

Definerer en generell andregradsfunksjon:

f(x):=a x^2 + b x + c

→ $f(x) := a\,x^2 + b\,x + c$

g(x):=f(x-a)

→ $g(x) := a^3 + a\,x^2 - 2\,a^2\,x - a\,b + b\,x + c$

Tester om punktet (r,g(r)) som ligger a til høyre for (r-a,f(r-a)), har samme y-koordinat:

g(r)

→ $a^3 + a\,r^2 - 2\,a^2\,r - a\,b + b\,r + c$

f(r-a)

→ $a^3 + a\,r^2 - 2\,a^2\,r - a\,b + b\,r + c$

Bevis:
Hvis vi har en funksjon $f(x)$ og definerer $g(x) = f(x-a)$,
så vil $g(r) = f(r-a)$.
Det betyr at punktet $(r, g(r))$ på grafen til $g(x)$ har samme y-verdi som punktet $(r-a, f(r-a))$ på grafen til $f(x)$, som ligger forskjøvet a enheter til venstre for $r-a$. Altså ligger $g(x) = f(x-a)$ a enheter til høyre for $f(x)$.

Symmetri om akser, linjer og punkter:

Andregradsfunksjonen $f(x) = ax^2 + bx + c$ er alltid symmetrisk om en loddrett linje med x-koordinat: $x = -\frac{b}{2a}$
Det er derfor nullpunkter, hvis de eksisterer, ligger symmetrisk om denne x-verdien:

$-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Topp- eller bunnpunktet må derfor også ligge på symmetrilinjen $x = -\frac{b}{2a}$,
så topp- eller bunnpunktet har koordinatene $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a})) = (-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$

```
f(x):=a x^2 + b x + c
```
$\rightarrow\ \mathbf{f(x) := a\,x^2 + b\,x + c}$

```
f(-b/(2 a))
```
$\rightarrow\ \dfrac{-b^2 + 4\,a\,c}{4\,a}$

Generelt om symmetrier om akser og punkter:

Symmetri om y-aksen:

$f(x)$ er symmetrisk om y-aksen $\Leftrightarrow$ $\boxed{f(x) = f(-x) \text{ for alle } x \in D_f}$

Bevis:
x og $-x$ ligger like langt fra y-aksen på hver sin side. $(x - 0 = 0 - (-x))$
Punktene $(x, f(x))$ og $(-x, f(-x))$ ligger derfor symmetrisk om y-aksen.

Symmetri om loddrett linje $x = a$:

$f(x)$ er symmetrisk om linjen $x = a \Leftrightarrow$ $\boxed{f(x) = f(2a - x)}$

Bevis:
x og $2a - x$ ligger like langt fra linjen $x = a$, da x ligger $x - a$ til høyre for linjen, og $2a - x$ ligger $a - (2a - x) = x - a$ til venstre for linjen.

Symmetri om Origo:

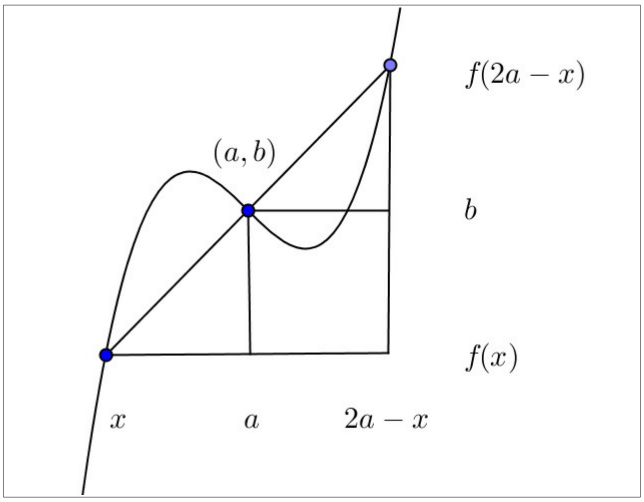
$f(x)$ er symmetrisk om Origo$\Leftrightarrow$ $\boxed{f(x) = -f(-x)}$

Bevis: Punktene $(x, f(x))$ og $(-x, f(-x)) = (-x, -f(x))$ har x- og y-koordinater som ligger like langt fra Origo på hver sin side av Origo.

Symmetri om et punkt (a, b):

$f(x)$ er symmetrisk om punktet (a, b) $\Leftrightarrow$ $\boxed{f(x) = 2b - f(2a - x)}$

Bevis: y-koordinatene til $(x, f(x))$ og $(2a - x, f(2a - x))$ ligger like langt fra punktet (a, b) på hver sin side, da $(x, f(x))$ ligger $f(x) - b$ over (a, b), mens $(2a - x, f(2a - x))$ ligger $b - f(2a - x) = b - (2b - f(x)) = f(x) - b$ under (a, b).



Ligninger for rette linjer:

To-punktsformelen, rett linje gjennom (x_1, y_1) og (x_2, y_2):

$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1)}$ (eller $f(x) = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1) + y_1$)

Ett-punktsformelen, rett linje gjennom (x_1, y_1) med stigningstall a:

$\boxed{y - y_1 = a(x - x_1)}$ (eller $f(x) = a(x - x_1) + y_1$)

Hvis linjen er tangenten til en funksjon $f(x)$ med tangeringspunkt (x_P, y_P),
så får vi tangentens ligning som:

$\boxed{y - y_P = f'(x_P)(x - x_P)}$ (eller $f(x) = f'(x_P)(x - x_P) + y_P$)

Stigningstall for normale linjer:

Når to linjer, l og m står normalt på hverandre, så er produktet av stigningstallene lik -1:

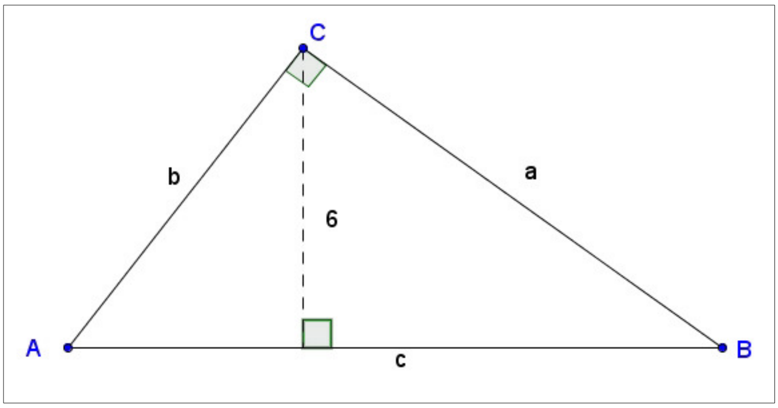
$$\boxed{l \perp m \Leftrightarrow s_1 \cdot s_2 = -1}$$

Bevis:

Retningsvektorer $\overrightarrow{r_1} = [1, s_1]$, $\overrightarrow{r_2} = [1, s_2]$
$l \perp m \Leftrightarrow \overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{r_2} = 0 \Leftrightarrow [1, s_1] \cdot [1, s_2] = 0 \Leftrightarrow$
$1 + s_1 s_2 = 0 \Leftrightarrow s_1 s_2 = -1$

Eksempler på oppgaver og løsninger fra UDIRs eksempeloppgaver:

Eksempeloppgave 1T, oppgave 1 i del 2:



Trekanten ABC har omkretsen 30. Høyden fra C p AB er 6.
a) Vis at vi har ligningssystemet:

$$\left[\begin{array}{lr} a+b+c = 30 & I) \\ a^2+b^2 = c^2 & II) \\ ab = 6c & III) \end{array}\right]$$

b) Bruk *CAS* til å bestemme a, b og c.

Løsning:

a) Opplysningen om omkretsen, Pythagoras og formlikhet gir de tre ligningene.

b)

{ a+b+c=30, a^2+b^2=c^2, a b=6 c}

Løs: $\left\{\left\{a = \frac{15}{2}, b = 10, c = \frac{25}{2}\right\}, \left\{a = 10, b = \frac{15}{2}, c = \frac{25}{2}\right\}\right\}$

(Kan også skrive { {a+b+c=30, a ^2+b ^2=c ^2, a b=6 c}, {a,b,c} }
for å gjøre helt klart hva som er de ukjente variablene. I noen tilfeller
kan det være flere bokstaver som ikke er ukjente!)

Kommentar:
Oppgave b) tester egentlig ingen annen kunnskap enn syntaksen for å løse
tre ligninger med tre ukjente i et digitalt verktøy...
Det hadde vært mer meningsfylt å tipse om bruk av første kvadratsetning,
så kunne oppgaven vært løst uten CAS:

Summering av ligningene *II*) og 2 • *III*) gir:

$$a^2+b^2+2ab = c^2+2(6c)$$
$$(a+b)^2 = c^2+12c \qquad IV)$$

I) gir: $a+b = 30-c \Rightarrow (a+b)^2 = (30-c)^2 \qquad V)$

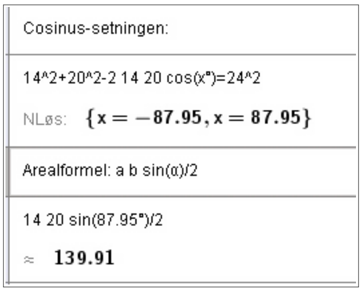
Sammenligner vi *IV*) og *V*) får vi andregradsligningen:

$c^2 + 12c = (30 - c)^2 \Leftrightarrow c^2 + 12c = 900 - 60c + c^2 \Leftrightarrow$
$72c = 900 \Leftrightarrow c = \frac{900}{72} = \frac{25}{2}$ osv.

Eksempeloppgave 1T oppgave 4 i del 2:

I skolegården står det tre trær. Trærne danner hjørnene i en trekant. Petter måler avstandene mellom trærne til 14.0, 20.0 og 24.0 m.
Bruk CAS til å bestemme arealet av trekanten som trærne danner.

Mulig løsning:



Obs: Viktig å bruke grader (°) etter x, hvis man ønsker å bruke grader istedenfor radianer!

Alt-o gir grader-symbolet ° !

Kommentar:

Er dette en felle for 1T elever? Glemmer de grader-symbolet får de svar i radianer, som ikke er i læreplanen til 1T!
Finnes en egen formel for dette, Herons formel:

$$A_{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad \text{der } s = \frac{a+b+c}{2}$$

Den gir:

$$s = \frac{14+20+24}{2} = 29$$

og

$$A_{ABC} = \sqrt{29(29-14)(29-20)(29-24)} \approx 140$$

Til orientering:

Herons formel kan faktisk utledes nettopp ved hjelp av arealformelen og cosinussetningen. Jeg tar med beviset da det illustrerer hvor sentral konjugatsetningen er i algebraiske manipulasjoner!

$$\text{I } A = \frac{1}{2} bc \sin A \qquad \Rightarrow 4A^2 = b^2c^2 \sin^2 A$$
$$\text{II } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad \Rightarrow \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

Erstatter vi $\sin^2 A$ med $1 - \cos^2 A$ får vi:

$$4A^2 = b^2c^2(1 - (\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})^2) = b^2c^2(1 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2})$$
$$= b^2c^2 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4}$$

som etter multiplikasjon med 4 gir:

$$16A^2 = (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$$
$$= (2bc + (b^2 + c^2 - a^2)(2bc - (b^2 + c^2 - a^2)$$
$$= ((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)$$
$$= (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$$

$$= 2s(2s-2a)(2s-2c)(2s-2b)$$
$$= 16s(s-a)(s-b)(s-c)$$

som etter forkorting med 16 gir:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

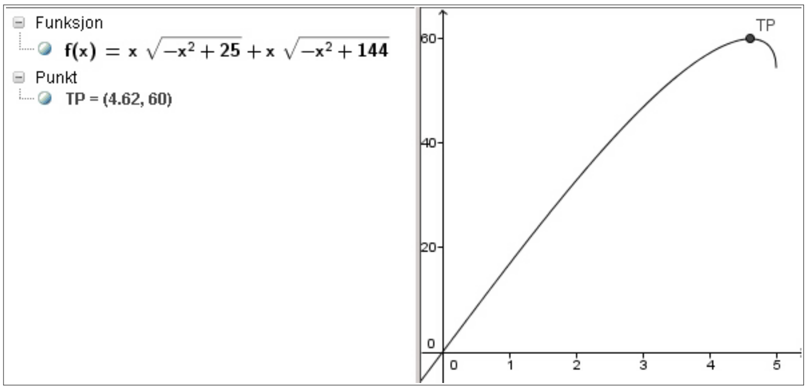
Eksempeloppgave R1 oppgave 4 i del 2:

Her skal man i første del av oppgaven vise at arealet av en drake blir

$$A(x) = x(\sqrt{25-x^2} + \sqrt{144-x^2} .$$

Så skal man bruke graftegner til å bestemme det største arealet draken kan ha.

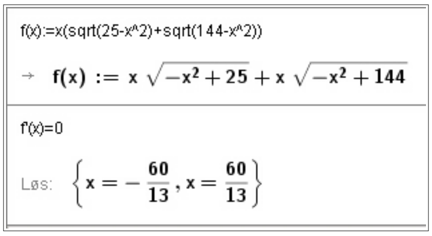
Mulig løsning:



der toppunktet ble funnet med kommandoen:

TP=Ekstremalpunkt[f,4,5]

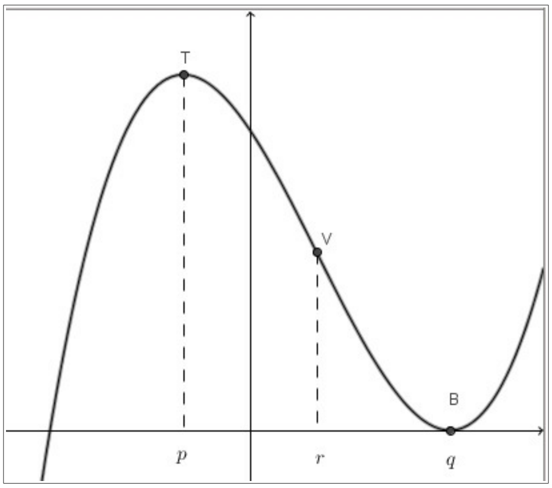
I CAS-delen kan man kontrollere med:



($\frac{60}{13} \approx 4.62$)

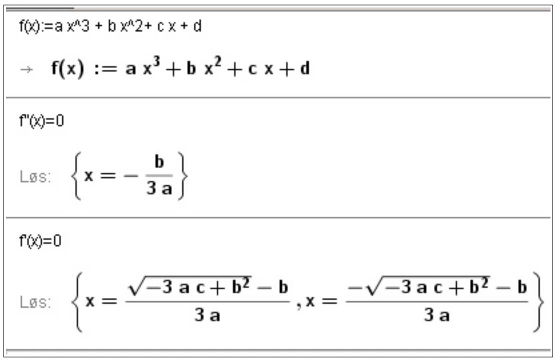
Eksempeloppgave R1 oppgave 6 i del 2:

En funksjon f er gitt ved $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad D_f = \mathbb{R}$



Grafen har toppunkt T når $x = p$ og bunnpunkt B når $x = q$.
Bruk CAS til å vise at x-koordinaten til vendepunktet V (infleksjonspunktet) ligger midt mellom x-koordinaten til toppunktet og x-koordinaten til bunnpunktet.

Mulig løsning:



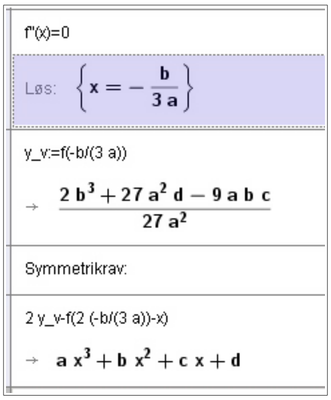
Som man ser ligger altså nullpunktene til den deriverte like langt på hver sin side fra x-koordinaten $-\frac{b}{3a}$ for nullpunktet til den dobbeltderiverte.

Kommentar:
Dette er egentlig banalt. Det er en tredjegradsfunksjon så den deriverte blir en andregradsfunksjon. Nullpunktene til den deriverte ligger derfor symmetrisk om en midtverdi ut fra abc-formelen.
Denne midtverdien er også x-koordinaten til bunnpunktet for den deriverte, altså der den dobbeltderiverte er null og vendepunktet befinner seg!

Mer generelt kan vi faktisk vise at alle tredjegradsfunksjoner er symmetriske om vendepunktet, eksempelvis ved å bruke testen:

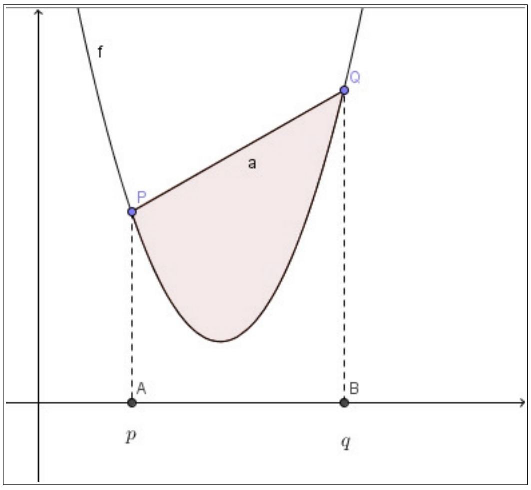
$$f(x) = 2y_V - f(2x_V - x) \qquad \text{der} \qquad V = (x_V, y_V)$$

(Se i starten av dette dokumentet om symmetrier!)



Eksempeloppgave R2 oppgave 2 og 6 i del 2:

$f(x) = ax^2 + bx + c$
Et område er avgrenset av grafen til f og en rett linje (korde) PQ.
Skjæringspunktene P og Q har x-koordinater p og q.
Bruk CAS til å vise at arealet av det avgrensede området bare
er avhengig av differansen $p - q$ og a.



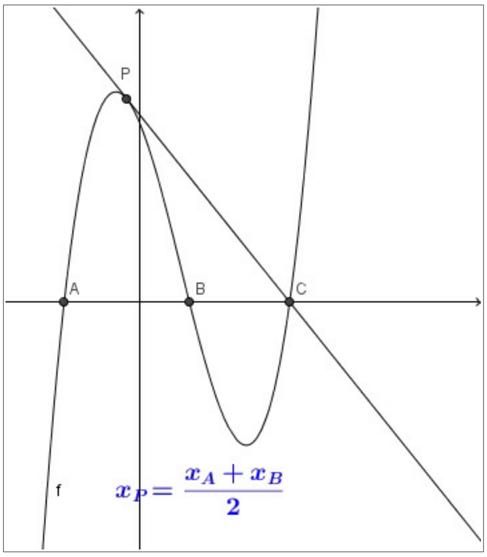
Areal A_t under rett linje er trapeset $ABQP$.
Arealet A_f under kurven er integralet $\int_p^q f(x)dx$.
Differansen er det søkte arealet.

1	f(x):=a x^2+b x+c → $f(x) := a\,x^2 + b\,x + c$
2	Trapeset:
3	A_t:=(f(p)+f(q))*(q-p)/2 → $-\frac{1}{2}\,a\,p^3 + \frac{1}{2}\,a\,q^3 - \frac{1}{2}\,a\,p\,q^2 + \frac{1}{2}\,a\,p^2\,q - \frac{1}{2}\,b\,p^2 + \frac{1}{2}\,b\,q^2 - c\,p + c\,q$
4	Integralet:
5	A_f:=Integral[f,p,q] → $-\frac{1}{3}\,a\,p^3 + \frac{1}{3}\,a\,q^3 - \frac{1}{2}\,b\,p^2 + \frac{1}{2}\,b\,q^2 - c\,p + c\,q$
6	A_t-A_f → $-\frac{1}{6}\,a\,p^3 + \frac{1}{6}\,a\,q^3 - \frac{1}{2}\,a\,p\,q^2 + \frac{1}{2}\,a\,p^2\,q$
7	Faktoriser[((-1) / 6 a p^3 + 1 / 6 a q^3 - 1 / 2 a p q^2 + 1 / 2 a p^2 q)] → $-(p-q)^3 \cdot \frac{a}{6}$

Konklusjon: Vi ser at arealet bare avhenger av a og $p - q$.

En klassisk CAS-oppgave:

Vi har en tredjegradsfunksjon med 3 nullpunkter$A$, B og C.
Punktet P har x-koordinat midt mellom x-koordinatene til A og B.
Vis at en tangent til funksjonen gjennom P går gjennom det tredje nullpunktet.

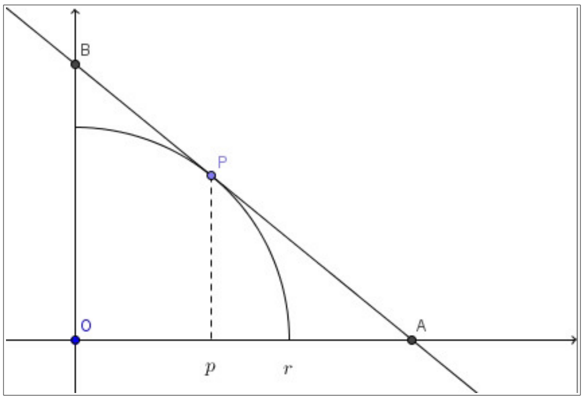


Lurere å definere $f(x) = a(x-b)(x-c)(x-d)$, uttrykt ved nullpunktene,
enn den vanlige $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$!

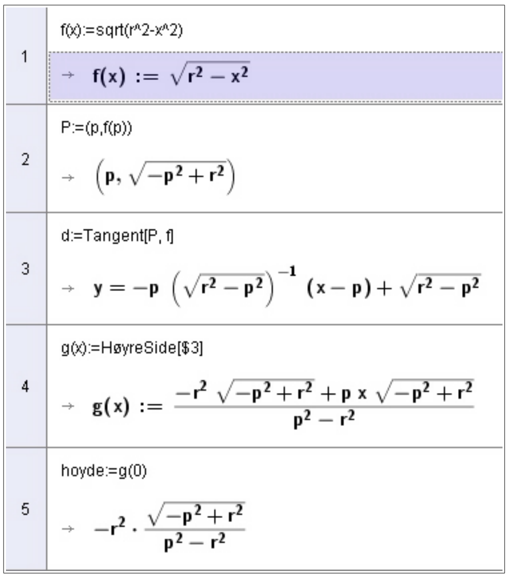
1	f(x):=a (x-b) (x-c) (x-d) $\rightarrow$ $\mathbf{f(x)} := a\,x^3 - a\,b\,x^2 - a\,c\,x^2 - a\,d\,x^2 - a\,b\,c\,d + a\,b\,c\,x + a\,b\,d\,x + a\,c\,d\,x$
2	x_P:=(b+c)/2 $\rightarrow$ $\frac{1}{2}\,b + \frac{1}{2}\,c$
3	P:=(x_P,f(x_P)) $\rightarrow$ $\left(\frac{b+c}{2}, \frac{-a\,b^3 + a\,b^2\,c + 2\,a\,b^2\,d + a\,b\,c^2 - 4\,a\,b\,c\,d - a\,c^3 + 2\,a\,c^2\,d}{8}\right)$
4	T:=Tangent[P, f] $\rightarrow$ $y = \left(a\,3\,\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 - a\,b\,2\cdot\frac{b+c}{2} - a\,c\,2\cdot\frac{b+c}{2} - a\,d\,2\cdot\frac{b+c}{2} + a\,b\,c + a\right.$
5	HøyreSide[$4] = 0 Løs: $\{x = d\}$

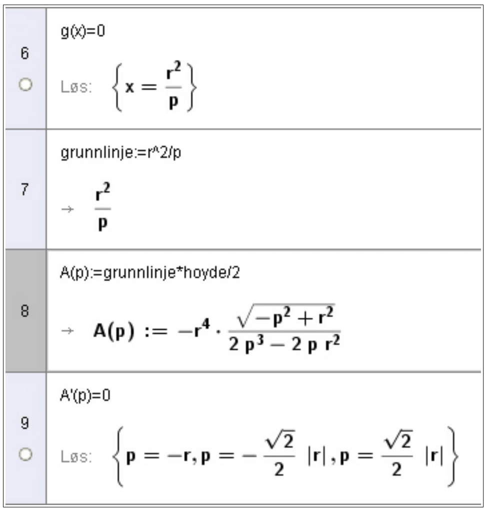
Konklusjon, vi ser at tangenten skjærer x-aksen for $x = d$, altså i det tredje nullpunktet.

Optimalisering; typeoppgave



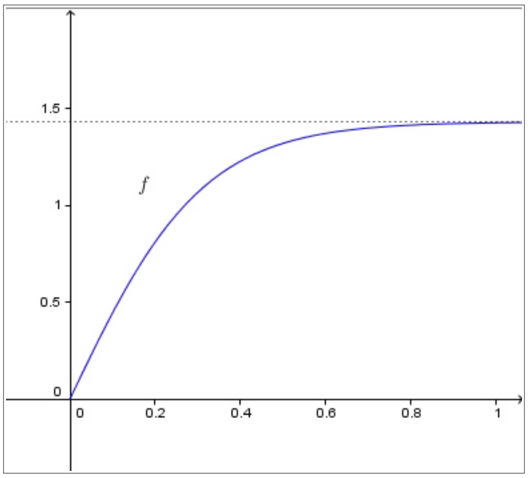
Figuren viser en kvartsirkel med radius r; $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.
Vi har et punkt P med x-koordinat p.
Finn ut for hvilken verdi av p arealet av trekanten OAB er minst.





Arealet er minst når $p = \frac{\sqrt{2}}{2} r$. (De andre løsningene forkastes.)

Fysikkforsøk med fallende Muffin-former



Figuren viser utviklingen av hastigheten til en fallende muffin-form som funksjon av tiden etter at den blir sluppet fra en viss høyde.
Den teoretiske formelen for denne funksjonen er:

$$f(t) = a\frac{1-be^{-kt}}{1+be^{-kt}} \text{ [m/s]}, \qquad t \in [0, \rightarrow\rangle \text{ [sek]}$$

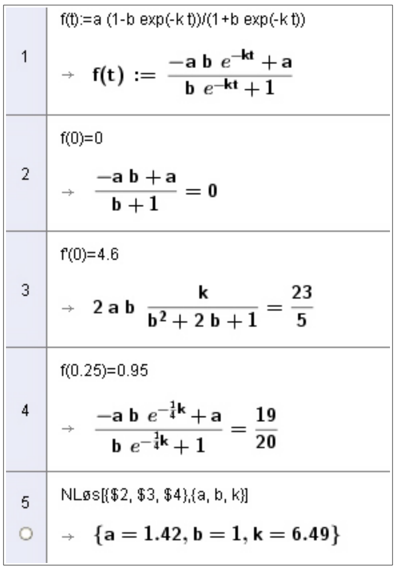
a) Bestem konstantene a, b og k ut fra disse opplysningene:

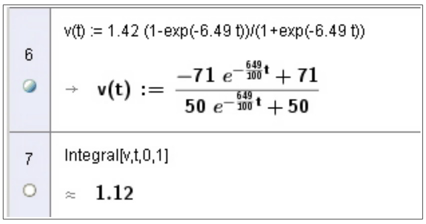
I $\quad f(0) = 0$

II $\quad f'(0) = 4.6$

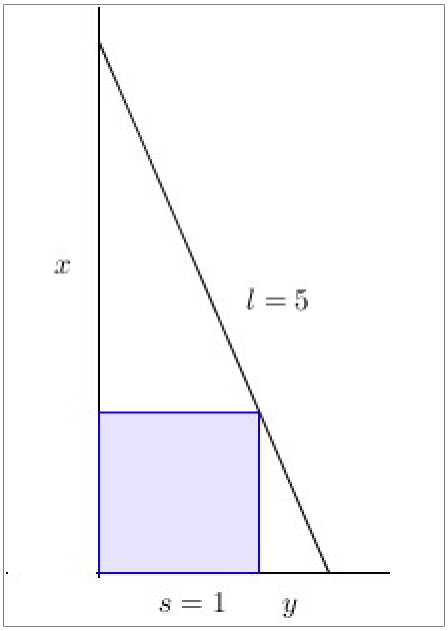
III $\quad f(0.25) = 0.95$

b) Finn ut hvor langt muffinformen har falt det første sekundet.





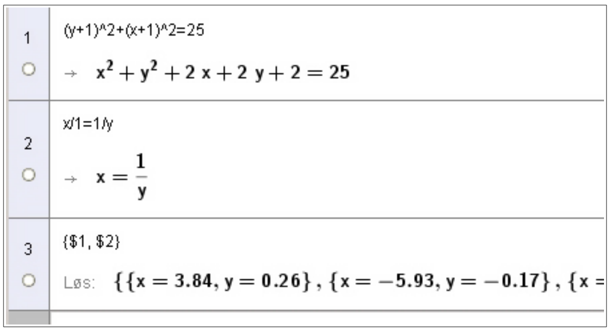
Stigeproblemet



Figuren viser en 5 meter lang stige som står opp mot en vegg og støtter seg på en kvadratisk kasse med sidekanter som er 1 meter lange.
Finn avstanden x fra kassen og opp til anleggspunktet mot veggen og avstanden y fra kassen og bort til anleggspunktet mot bakken.

Vi får ligningene:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & (x+1)^2 + (y+1)^2 = 5^2 \\ \text{II} & \frac{x}{1} = \frac{1}{y} \end{array}$$



Vi får løsningen $x = 3.84$ og $y = 0.26$ eller omvendt.
(Negative løsninger forkastes.)

Induksjonsbevis

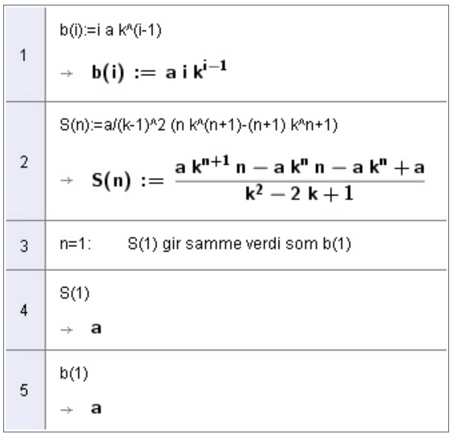
Vi har en generalisering av geometrisk rekke, "trekant"-rekken:

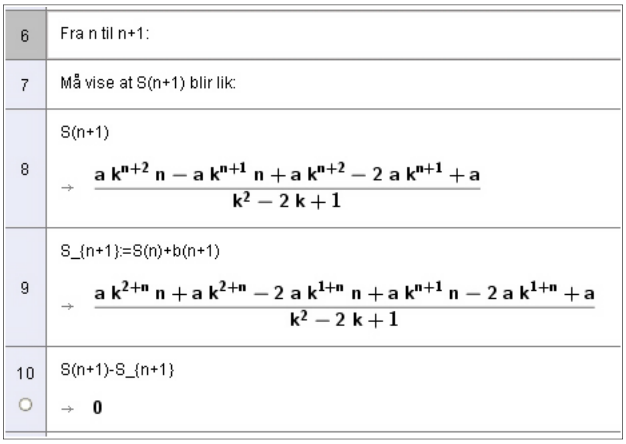
$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} i\ a\ k^{i-1} = a + 2ak + 3ak^2 + 4ak^3 + \ldots + nak^{n-1} =$$

$$\begin{aligned} a + ak + ak^2 + ak^3 + \ldots + ak^{n-1} &+ \\ ak + ak^2 + ak^3 + \ldots + ak^{n-1} &+ \\ ak^2 + ak^3 + \ldots + ak^{n-1} &+ \\ \ldots & \\ ak^{n-1} & \end{aligned}$$

Det kan vises at $S(n) = \frac{a}{(k-1)^2}(nk^{n+1} - (n+1)k^n + 1)$

Bruk CAS til å gjennomføre et induksjonsbevis for denne formelen.





Kurvetilpasning

Hvis vi skal tilpasse en polynomfunksjon, for eksempel en tredjegradsfunksjon, til 4 målepunkter; $(3,6),(4,-2),(5,8),(6,3)$, kan vi sette opp en differansetabell:

x :	3	4	5	6
$n = x - 3$	0	1	2	3
$p(x)$	6	-2	8	3
Δ_1	-8	10	-5	
Δ_2	18	-15		
Δ_3	-33			

Polynomfunksjonen kan vi da finne som:

$$
\begin{aligned}
p(n) &= 6\binom{n}{0} - 8\binom{n}{1} + 18\binom{n}{2} - 33\binom{n}{3} \\
&= 6 \cdot 1 - 8 \cdot n + 18 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - 33\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2} \\
&= \frac{51}{2}n^2 - 28n - \frac{11}{2}n^3 + 6 \\
f(x) &= p(x-3) = \frac{51}{2}(x-3)^2 - 28(x-3) - \frac{11}{2}(x-3)^3 + 6 \\
&= -\frac{11}{2}x^3 + 75x^2 - \frac{659}{2}x + 468
\end{aligned}
$$

Bruk CAS til å vise at denne regelen er generell for en tredjegradsfunksjon.

Vi setter opp tabellen med målepunktene:

$(a, b_1),\ (a+1, b_2),\ (a+2, b_3),\ (a+3, b_4)$

x :	a	a+1	a+2	a+3
$n = x - a$:	0	1	2	3
$p(n)$:	b_1	b_2	b_3	b_4
Δ_1	b_2-b_1	b_3-b_2	b_4-b_3	
Δ_2	(b_3-b_2)-(b_2-b_1)	(b_4-b_3)-(b_3-b_2)		
Δ_3	((b_4-b_3)-(b_3-b_2))-((b_3-b_2)-(b_2-b_1))			

1	Differansene:
2	d_1:=b_2-b_1 → $-b_1 + b_2$
3	d_2:=(b_3-b_2)-(b_2-b_1) → $b_1 - 2\,b_2 + b_3$
4	d_3:=((b_4-b_3)-(b_3-b_2))-((b_3-b_2)-(b_2-b_1)) → $-b_1 + 3\,b_2 - 3\,b_3 + b_4$
5	p(n):=b_1 nCr[n, 0]+d_1 nCr[n, 1]+d_2 nCr[n, 2]+d_3 nCr[n, 3] → $p(n) := -\frac{1}{6}\,b_1\,n^3 + \frac{1}{2}\,b_2\,n^3 - \frac{1}{2}\,b_3\,n^3 + \frac{1}{6}\,b_4\,n^3 + b_1\,n^2 - \frac{5}{2}\,b_2\,n$

6	f(x):=p(x-a) → $f(x) := -\frac{1}{6}\,b_1\,x^3 + \frac{1}{2}\,b_2\,x^3 - \frac{1}{2}\,b_3\,x^3 + \frac{1}{6}\,b_4\,x^3 + \frac{1}{6}\,a^3\,b_1 - \frac{1}{2}\,a^3\,b_2 + \frac{1}{2}$
7	f(a) → b_1
8	f(a+1) → b_2
9	f(a+2) → b_3
10	f(a+3) → b_4

Som vi ser gir funksjonen som lages på denne måten oss de verdiene vi skal ha i henhold til målepunktene $(a, b_1),\ (a+1, b_2),\ (a+2, b_3),\ (a+3, b_4)$.