Differanseregning

Spesielle regnemetoder for spesielt interesserte.

Spesielle metoder for å lage formler for polynom-følger og rekker/summer.

Definisjoner og regler:

Differanser: $\nabla a_n = a_{n+1} - a_n$

Fakturell: $n^{(r)} = nPr = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$

Slik at:
$$\begin{aligned} n^{(2)} &= n(n-1) \\ n^{(3)} &= n(n-1)(n-2) \\ n^{(4)} &= n(n-1)(n-2)(n-3) \end{aligned}$$

Da kan vi bevise en regel som minner om derivasjon:

$$\begin{aligned} \nabla n^{(2)} &= 2n \\ \nabla n^{(3)} &= 3n^{(2)} \\ &\ldots \\ \nabla n^{(r)} &= rn^{(r-1)} \end{aligned} \qquad \textbf{I)}$$

Og ved å bruke dette den andre veien, kan vi bevise en regel som minner om integrasjon:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i =_{1}^{n+1} [A_n] = A_{n+1} - A_1, \text{ hvis } \nabla A_n = a_n \qquad \textbf{II)}$$

Bevis for differanser:

$$\nabla n^{(2)} = (n+1)^{(2)} - n^{(2)} = (n+1)n - n(n-1) = n(n+1-(n-1)) = 2n$$

Mer generelt:

$$\begin{aligned} \nabla n^{(r)} &= (n+1)^{(r)} - n^{(r)} = \\ & (n+1)n(n-1)\ldots(n-r+2) - n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)(n-r+1) = \\ & n(n-1)\ldots(n-r+2)[(n+1)-(n-r+1] = \\ & n^{(r-1)}[n+1-n+r-1] = n^{(r-1)}r = rn^{(r-1)} \end{aligned}$$

For geometriske/eksponentielle følger:

$$\nabla(a\,k^n) = a\,k^{n+1} - a\,k^n = a\,k^n(k-1)$$

): Differansene blir leddet over multiplisert med $(k-1)$!

Bevis for formelen for summering av rekke:

Hvis $\Delta A_n = A_{n+1} - A_n = a_n$, har vi:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \ldots + (A_{n+1} - A_n) = A_{n+1} - A_1$$

Eksempel på differanse-oppstilling:

n :	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**...**	**n**
A_n :	-1	4	21	56	115	$\ldots$	$n^3 - 2n$
a_n :	5	17	35	59			$3n^2 + 3n - 1$
∇a_n :	12	18	24				$6n + 6$
$\nabla^{(2)} a_n$:	6	6					6

Vi ser at følgene i hver rad under den første indeksraden har raden under som differanser:

$a_n = \nabla A_n = A_{n+1} - A_n$
$\nabla a_n = a_{n+1} - a_n$
osv.

Følgene i hver rad har som vi ser økende grad for hver rad vi går oppover!

Legg også merke til summeringsmønsteret:

n :	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**...**	**n**
A_n :	$\boxed{-1}$	4	21	56	$\boxed{115}$	$\ldots$	$n^3 - 2n$
a_n :	5	17	35	59			$3n^2 + 3n - 1$
∇a_n :	12	18	24				$6n + 6$
$\nabla^{(2)} a_n$:	6	6					6

Her har vi:

-1 + (5+17+35+59)=115 ⇔(5+17+35+59)=115-(-1)=116

Eller algebraisk:

$$A_1 + \sum_{i=1}^{4} a_i = A_{4+1} = A_5 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} a_i = A_{4+1} - A_1 = A_5 - A_1$$

Utregninger av eksplisitte formler for a_n, A_n og til slutt $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Bortsett fra at graden avtar med 1 for hver linje, er det vanskelig å se noen sammenheng mellom funksjonsuttrykkene:

A_n :	$n^3 - 2n$
a_n :	$3n^2 + 3n - 1$
∇a_n :	$6n + 6$
$\nabla^{(2)} a_n$:	6

Men skriver vi dem som *nPr* med fakturell-notasjon;

$n^{(r)} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1),$

ser vi mønsteret vi beviste med differanser lengre opp:

A_n :	$n^3 - 2n$	$n^{(3)} + 3n^{(2)} - n$
a_n :	$3n^2 + 3n - 1$	$3n^{(2)} + 6n - 1$
∇a_n :	$6n + 6$	$6n + 6$
$\nabla^{(2)} a_n$:	6	6

Da har vi en metode for å finne eksplisitte uttrykk for a_n, A_n og $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$:

Bruk tabell og regn differanser til vi ender med konstanter i rad 4.

Raden over er da en aritmetisk rekke og vi finner lett $\nabla a_n = 6n + 6$

Så bruker vi differansereglene omvendt, som en slags "integrasjon":

$$a_n = 6\frac{n^{(2)}}{2} + 6n + C = 3n^{(2)} + 6n + C = 3n(n-1) + 6n + C$$

C bestemmes med betingelsen:

$a_1 = 5 \Leftrightarrow 5 = 3 \cdot 1 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + C \Leftrightarrow C = -1$

): $a_n = 3n^{(2)} + 6n - 1 = 3n(n-1) + 6n - 1 = 3n^2 + 3n - 1$

Raden over, med A_n, kan lages på samme måte:

$$A_n = 3\frac{n^{(3)}}{3} + 6\frac{n^{(2)}}{2} - n + C = n^{(3)} + 3n^{(2)} - n + C$$

C bestemmes med betingelsen:

$A_1 = -1 \Leftrightarrow -1 = 0 + 0 - 1 + C \Leftrightarrow C = 0$

): $A_n = n^{(3)} + 3n^{(2)} - n = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) - n =$
$n((n-1)(n-2) + 3(n-1) - 1) = n(n^2 - n - 2n + 2 + 3n - 3 - 1) =$
$n(n^2 - 2) = n^3 - 2n^2$

Og da blir til slutt summen:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = A_{n+1} - A_1 = (n+1)^{(3)} + 3(n+1)^{(2)} - (n+1) - (-1) =$$
$$(n+1)n(n-1) + 3(n+1)n - (n+1) + 1 =$$
$$n(n^2-1) + 3n^2 + 3n - n - 1 + 1 = n^3 - n + 3n^2 + 2n =$$
$$n^3 + 3n^2 + n$$

Dette gir rekken med delsummer:

$S_1 = 5$

$S_2 = 22 = (5 + 17)$

$S_3 = 57 = (5 + 17 + 35)$
$S_4 = 116 = (5 + 17 + 35 + 59)$
osv.