Kommentarer til oppgavene

7.14, 7.17, 7.20, 7.34, 7.36, 7.98, 7.92

Teknikker:

- **Se/gjette/prøve**, gjerne i kombinasjon med tabeller, differanser og:
- **Figurtall**. (Eksempel 5, eksempel 11 og figuren nederst side 359, 7.5, 7.20, 7.36)
- **Differanser** (Oppgave 7.10)
- **Kurvetilpasning**/ligningsløsing: Finner polynomgrad med differanser.
- **Formler**:
  Aritmetisk følge: $a_n = a_1 + d(n-1),\ \ S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
  Geometrisk følge: $a_n = a_1 k^{n-1},\ S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k-1}$

Spesielle formler for polynom-følger: (*Se eget notat for bevis/forklaringer!*)

2 grad: $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i = a_1 + \frac{n-1}{2}(d_1 + d_{n-1})$, der $d_n = a_{n+1} - a_n$

Mer generelt:
Hvis differansefølgen er et polynom, eksempelvis:
$d_n = \nabla a_n = a_{n+1} - a_n = an^{(2)} + bn + c$
kan vi lage den opprinnelige følgen med:

$a\frac{n^{(3)}}{3} + b\frac{n^{(2)}}{2} + cn + C$, der C bestemmes ved hjelp av første ledd $a_1 = 0 + 0 + c + C$

der vi bruker en slags "integrasjonsregel" på $n^{(3)} = n(n-1)(n-2),\ \ n^{(2)} = n(n-1)$

Legg merke til at $n^{(r)}$ ikke er vanlig potens n^r, men n nPr $r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$
(Fakturell-notasjon)

Dette kan også utnyttes for å lagen en rekke av polynomfølger:
$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = {}_1^{n+1}[A_n] = A_{n+1} - A_1$, hvis $A_n = \nabla a_n = a_{n+1} - a_n$
(Som minner om integrasjon!)

7.14

a) Mønster rimelig opplagt, teller oppover, skifter retning og startsted for hver linje...

b) Kolonne B: 1,7,9,15,...
Legger til 6 og 2 annenhver gang.
Kan dele opp:
Ulike rader (1,3,5,7...): Aritmetisk følge: 1,9,17,...
Like rader (2,4,6,...): Aritmetisk følge: 7,15,23, ...
Altså:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_n = 1 + 4(n-1) = 4n - 3, n \in Ulike \\ b_n = 3 + 4(n-1) = 4n - 1, n \in Like \end{array} \right\}$$

$n = 1000$ (like): $b_n = 4 \cdot 1000 - 1 = 3999$

A	B	C	D	E
4000	3999	3998	3997	

Kunnne også sett på rad A og sett at $a_n = 4n$, n like,
som gir $a_n = 4 \cdot 1000 = 4000$ direkte, og B som $4000 - 1 = 3999$
Dette løser også c) direkte:
c) 1000 er delelig med 4, så $a_n = 4n = 1000 \Rightarrow n = 250$.

7.17

a) Mønster: Hvert tall er summen av tallene over (skrått opp til høyre og venstre).
(Må tenke oss at oppstillingen er rammet inn av nuller.)

b) Jeg stiller opp i en mer rektangulær tabell:

n\r	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Mønsteret blir da mer: "Hvert tall er summen av tallet over til venstre og tallet over,
eller uttrykt ved radnummer n og kolonnenummer r:

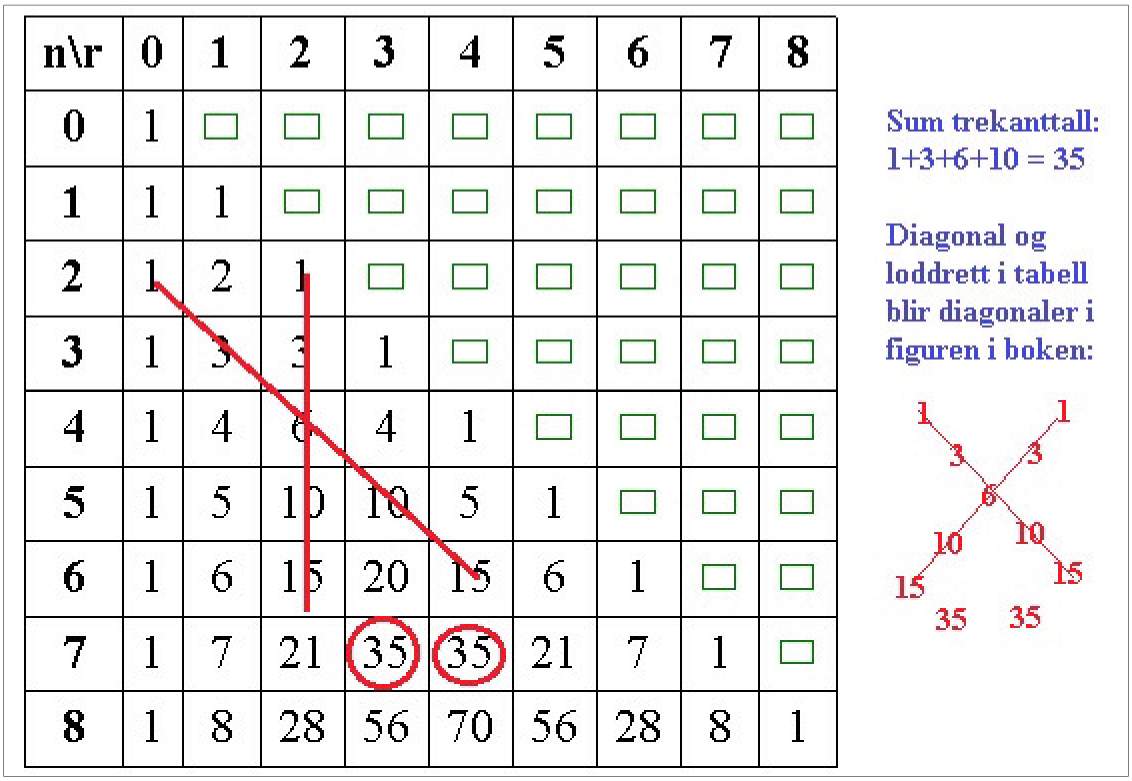
$$p(n,r) = p(n-1, r-1) + p(n-1, r)$$

Tallene i Pascals trekant kalles *binomiske koeffisienter* og noteres $\binom{n}{1}$, ***uten brøkstrek!***
Da kan vi skrive: $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

$\binom{7}{4}$ betyr egentlig $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ og kan regnes ut med **7 nCr 4** på lommeregner eller **nCr[7,4]** i GeoGebra.
c) 3 dje tall fra høyre er lik 3dje tall fra venstre, da Pascals trekant er *symmetrisk*,
altså har vi: $\binom{99}{2} = 4851 = \binom{99}{97}$

d) Summen av en diagonal er tallet rett under siste tall i diagonalen.
Eksempelvis er summen av fire trekanttall lik tallet under 10,
altså $20 = \binom{6}{3}$.

Generelt er summen av n trekanttall: $\binom{n+2}{n-1}$, da det siste tallet i summen ligger i $n+1$ rad i $n-1$ kolonne, eller $\binom{n+2}{3}$, hvis vi ser på kolonne 2, hvor siste tall ligger i $\binom{n+1}{2}$:



n\r	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

$$\binom{n+2}{n-1} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)\ldots4}{(n-1)!} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)\ldots4\cdot3\cdot2\cdot1}{(n-1)!3\cdot2\cdot1} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!3\cdot2\cdot1} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} =$$
$$\binom{n+2}{3} = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$$

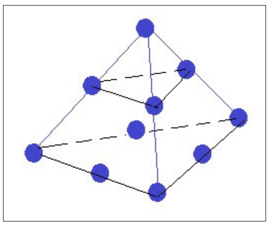
Legg merke til at vi her kunne brukt symmetri-regelen; $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ til å komme fra $\binom{n+2}{n-1}$ til $\binom{n+2}{3}$, slik at: $\binom{n+2}{n-1} = \binom{n+2}{n+2-(n-1)} = \binom{n+2}{3}$
Bevis for symmetri - regel:

$$VS = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}\,\frac{(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$
$$HS = \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-r)+1)}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)\ldots(r+1)}{(n-r)!}\,\frac{r!}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Se også oppgave 213 fra gamle bok, der disse summene av trekanttall kalles tetraedertallene:

213 Tetraedertallene - fra eldre utvage

Tetraedertallene er et tetraeder der hvert "lag" er trekanttall, slik at for eksempel tetraederet med $n = 3$ kuler i sidekant blir $6 + 3 + 1 = 10$:



a) Tegning viser at $T_3 = 10$

c) $T_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$ eller: Tetraedertallene er summen av de n første trekanttallene, som vi tidligere har vist har formelen $\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$: $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$

b) Vi har derfor tetraedertallene: $1, 4, 10, 20, 35, 56, \ldots$

c) Se oppgave 7.17 med Pascals trekant!
Pascals trekant:
Tetraedertallene går på skrå nedover fra cellen i tabellen med $n = 3, r = 0$, så vi finner uttrykket for T_n ved å se systemet:

$T_1 = \binom{3}{0}$
$T_2 = \binom{4}{1}$
$T_3 = \binom{5}{2}$
$\ldots$

Altså 2 høyere over og 1 mindre under i den binomiske koeffisienten:

$$T_n = \binom{n+2}{n-1} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)\ldots(n+2-(n-1)+1)}{(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)\ldots 5 \cdot 4}{(n-1)(n-2)\ldots 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{(n+2)(n+1)n}{3 \cdot 2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

(Med symmetriregelen $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ kunne vi gjort mer direkte:

$$T_n = \binom{n+2}{n-1} = \binom{n+2}{n+2-(n-1)} = \binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{3 \cdot 2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Se oppgave 7.17 for bevis av symmetriregel.)

Kan også bruke kurvetilpasning i GeoGebra:
Vet at det er et tredjegradsuttrykk, så vi trenger 4 punkter:
$(1, 1), (2, 4), (3, 10), (4, 20)$
RegPoly[{(1,1),(2,4),(3,10),(4,20)},3] gir da:

$$T_n = \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3} = \frac{n^3+3n^2+2n}{6} = \frac{n\left(n^2+3n+2\right)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \binom{n+2}{3}$$

7.20 - Femkanttallene

Femkant-tallene:

a), b)
Vi får tabellen:

n :	1	2	3	4	5	6	7	8	$\ldots$	n	$n+1$
f_n :	1	5	12	22	35	51	70	92	$\ldots$		
Differanser, d_n :	4	7	10	13	16	19	22		$\ldots$	$3n+1$	

Ved å se på differansene $4, 7, 10, 13, \ldots$ ser vi at de er en aritmetisk følge:

$$d_n = a_1 + d(n-1) = 4 + 3(n-1) = 3n + 1$$

Ved å fortsette å legge til differanser får vi de første 8 femkanttallene.

b) Dette mønsteret har vi egentlig allerede sett i a):
$f_2 = 1 + 4 = 5 = f_1 + d_1$
$f_3 = 5 + 7 = 12 = f_2 + d_2$
$f_4 = 12 + 10 = 22 = f_3 + d_3$

$\dots$
$f_n = f_{n-1} + d_{n-1}$

Så vi får den rekursive formelen:

c) $\left\{ \begin{array}{c} f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + d_{n-1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + 3(n-1) + 1 = f_{n-1} + 3n - 2 \end{array} \right\}$

eller

$\left\{ \begin{array}{c} f_1 = 1 \\ f_{n+1} = f_n + d_n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} f_1 = 1 \\ f_{n+1} = f_n + 3n + 1 \end{array} \right\}$

d) Eksplisitt formel på forskjellige måter

I Figurer:

e), f) Figuren i boken viser at $f_4 = \Delta_4 + 2\Delta_3$
Så vi generaliserer til: $f_n = \Delta_n + 2\Delta_{n-1} =$

$$\frac{n(n+1)}{2} + 2\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2+n+2n^2-2n}{2} = \frac{3n^2-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

II Figurer: (Hustall-variant)

g) Figuren viser at $f_n = Kvadrattall + "Taktall" =$ ("Rett opp veggene" og juster litt på figurene med i femkanttallene!)

$$n^2 + \Delta_{n-1} = n^2 + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{2n^2+n^2-n}{2} = \frac{3n^2-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

III Differanseformel:

Hvis differansene er aritmetiske eller geometriske, kan vi bruke denne formelen:

$a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$ Kan finne a_n ved å starte med a_1 og legge til alle mellomliggende differanser!

$$f_n = f_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i = 1 + \frac{n-1}{2}(d_1 + d_{n-1}) = 1 + \frac{n-1}{2}(4 + (3(n-1)+1)) =$$
$$1 + \frac{n-1}{2}(4 + 3n - 3 + 1) = 1 + \frac{n-1}{2}(3n+2) = \frac{2+3n^2-3n+2n-2}{2} = \frac{3n^2-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

IV Kurvetilpasning
Differansene er av første grad, så femkanttallene er av andre grad, trenger da 3 punkter:

RegPoly[{ (1,1), (2,5), (3,12) }, 3]
gir:
1.5x² - 0.5x

Altså: $f_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{n(3n-1)}{2}$

V Generell teknikk. (Se også eget notat.)

Dette er spesielle formler, så dette er for spesielt interesserte.

Vi har en regel som minner om derivasjon:

$$\nabla(n^{(2)}) = 2n, \qquad \nabla(n^{(3)}) = 3n^{(2)},\ \nabla n^{(4)} = 4n^{(3)}\ , ...$$

Obs:

$n^{(r)}$ betyr her nPr, ikke potens:

$$n^{(2)} = n(n-1)$$
$$n^{(3)} = n(n-1)(n-2)$$
$$n^{(4)} = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

Starter vi med differansene til f_n, $d_n = \nabla f_n = f_{n+1} - f_n$,
får vi første grad eller den aritmediske følgen:

$d_n = 3n + 1$

Som da gir femkanttallene:

$f_n = 3\frac{n^{(2)}}{2} + n + C$

C bestemmes ved hjelp av $f_1 = 1 = 3\frac{1(1-1)}{2} + 1 + C \Rightarrow C = 0$

): $\quad f_n = 3\frac{n^{(2)}}{2} + n = \frac{3n(n-1)+2n}{2} = \frac{n(3n-3+2)}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$

7.34

For å illustrere bruk av lommeregner når man skal regne ut summen av rekker når man mangler formler:

n'te ledd i tilsvarende tallfølge:

$a_n = \frac{1}{(n-1)!}$

(Husk at $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)\ldots 2 \cdot 1$ og at $0! = 1$ pr. definisjon/konvensjon.)

For å finne $\sum_{i=1}^{100} a_i$ bruker vi GeoGebra:

a(n):=1/(n-1)!

S:=Sum[a(i),i,1,100] gir 2.718..., altså går summen mot Eulers tall *e*.

7.36 - Pyramidetallene

a) og b):

$p_2 = 1 + 2^2 = 5$

$p_3 = 1 + 2^2 + 3^2 = 5 + 3^2 = 14$

$p_4 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 14 + 4^2 = 30$

$p_5 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \ = 30 + 5^2 = 55$

osv.

Pyramidetallene er summen av kvadrattallene!

(Hvert lag er kvadrattall, fra toppen: 1,4,9,16, ...)

c) $p_{100} = \sum_{i=1}^{100} i^2$

d) GeoGebra:

k(n):= n^2

p(n):=Sum[k(i),i,1,n] **gir:** $\frac{1}{3}\mathrm{n}^3+\frac{1}{2}\mathrm{n}^2+\frac{1}{6}\mathrm{n}$

p(100) **gir: 338350**

For spesielt interesserte:

Her er differansene kvadrattallene, så vi får:

$$\nabla(p_n) = p_{n+1} - p_n = (n+1)^2$$

Vi må få på fakturell-form, så vi omformer litt:

$$\nabla(p_n) = n^2 + 2n + 1 = n^2 - n + n + 2n + 1 = n(n-1) + 3n + 1 = n^{(2)} + 3n + 1$$

Ved å bruke differanse-reglene baklengs får vi pyramidetallene:

$$p_n = \frac{1}{3}n^{(3)} + \frac{3}{2}n^{(2)} + n + C$$

C gitt av at $p_1 = 1 = 0 + 0 + 1 + C \Rightarrow C = 0$

): $p_n = \frac{1}{3}n^{(3)} + \frac{3}{2}n^{(2)} + n = \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{3n(n-1)}{2} + n = \frac{2n(n-1)(n-2)+9n(n-1)+6n}{6} = \frac{n(2(n-1)(n-2)+9(n-1)+6)}{6} = \frac{n}{6}(2n^2 - 6n + 4 + 9n - 9 + 6) = \frac{n}{6}2(n+1)(n+\frac{1}{2}) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ (Som over!)

7.98 - Annuitetslån

Se eksempel 41!
Sluttverdien av 24 terminbeløp i slutten av 24 terminer, rett etter at siste terminbeløp er betalt inn: (Viktig å tegne en ordentlig og tydelig tabell! Her bare siste kolonne.)

$180000 \cdot 1.035^{23}$
$+180000 \cdot 1.035^{22}$
$+\ ...$
$+180000 \cdot 1.035^{1}$
$+180000$

$= X \cdot 1.035^{24}$ (Sluttverdi av lånebeløp)
Geometrisk rekke med $a_1 = 180000$, $k = 1.035$ og $n = 24$ gir oss:
$S_{24} = a_1\frac{k^n-1}{k-1} = 180000\frac{1.035^{24}-1}{1.035-1} = 6600000$

Sluttbeløpet $X \cdot 1.035^{24}$ av lånet X gir oss: $X \cdot 1.035^{24} = 6600000 \Rightarrow$
$X = \frac{6600000}{1.035^{24}} \approx 2890500$

Alternativ:

Istedenfor å regne med sluttbeløp, kunne vi fremført alt til startbeløp ved lånetidspunkt. Da må alle terminbeløpene deles med 1.035^n istedenfor å multipliseres:

$180000 \cdot (\frac{1}{1.035})^1$
$+180000 \cdot (\frac{1}{1.035})^2$
$+\ ...$
$+180000 \cdot (\frac{1}{1.035})^{23}$
$+180000 \cdot (\frac{1}{1.035})^{24}$

$= X$ (Startverdi av lånebeløp)
Geometrisk rekke med $a_1 = 180000 \cdot \frac{1}{1.035}$, $k = \frac{1}{1.035}$ og $n = 24$ gir oss:

$$X = a_1\frac{k^n-1}{k-1} = 180000 \cdot \frac{1}{1.035}\frac{(\frac{1}{1.035})^{24}-1}{(\frac{1}{1.035})-1} \approx 2890500$$

7.92

a) Tabell viser at dette er omtrent som sparing med faste beløp:

$n = 1$	2	3	...	n
0.2	$0.2 \cdot 0.977$	$0.2 \cdot 0.977^2$		$0.2 \cdot 0.977^{n-1}$
	0.2	$0.2 \cdot 0.977$		$0.2 \cdot 0.977^{n-2}$
		0.2		$0.2 \cdot 0.977^{n-3}$
			...	...
				0.2

For $n = 3$:

$$c_3 = ((0.2 \cdot 0.977 + 0.2) \cdot 0.977 + 0.2) =$$
$$0.2 \cdot 0.977^2 + 0.2 \cdot 0.977 + 0.2$$

eller kolonne 3 i tabellen over!

Siste kolonne viser at c_n er en geometrisk rekke med $c_1 = 0.2$, $k = 0.977$ og n ledd:

$$c_n = c_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} = 0.2 \frac{0.977^n - 1}{0.977 - 1} = 8.70 - 8.70 \cdot 0.977^n = 8.70(1 - 0.977^n)$$

b)

Etter 20 dager: $c_{20} = 8.70(1 - 0.977^{20}) \approx 3.24$ [ng]

d) For å få 5 ng:

$$c_n = 5 \Leftrightarrow 8.70(1 - 0.977^n) = 5 \Leftrightarrow 0.977^n = (1 - \frac{5}{8.7}) \Leftrightarrow$$
$$n = \frac{\ln(1 - \frac{5}{8.7})}{\ln(0.977)} \approx 37 \text{ [dager]}$$

e) Den andre sauen må oppfylle ligningen:

$$0.2 \frac{k^{20} - 1}{k - 1} = 3.3 \Leftrightarrow 0.2k^{20} - 3.3k + 3.1 = 0$$

Dette er en 20-grads ligning i k, så her må vi bruke digitale hjelpemidler (grafisk skjæring eller CAS) for å finne $k = 0.9792$, som tilsvarer $1 - k = 1 - 0.9792 = 0.0208 \approx 2.1$ % nedbrytning i døgnet.

I og med at nedbrytning og inntak skjer *kontinuerlig* gjennom hele døgnet, ikke *diskret*, en gang i døgnet, skulle man tro vi fikk et mer nøyaktig resultat med å bruke differensialligninger:

Endring i døgnet: $y' = 0.2 - 0.023y$

Løser vi denne differensialligningen, med initialbetingelse $y(0) = 0$, får vi den spesielle løsningen:

$y = 8.70(1 - e^{-0.023t})$, der t er døgn.

Sammenligner vi med rekke-løsningen over:

$c_n = 8.70(1 - 0.977^n)$

og grafer begge som funksjoner ser vi at grafene ligger så og si oppå hverandre!

Dette skyldes at $e^{-(1-k)x} = e^{(k-1)x}$ er nokså lik k^x hvis k ikke er altfor langt unna 1.

(Hvis vi skriver $k^x = e^{\ln k\, x}$ og sammenligner med $e^{(k-1)x}$, ser vi at $\ln k$ må være nokså lik $k - 1$ for at den diskrete rekke-løsningen skal være tilnærmet lik den kontinuerlige løsningen med differensialligning.
Dette gjelder sålenge k ikke er altfor forskjellig fra 1.)