R2 - 18.11.11

K. 2 - Algebra

Løsningsskisser

I

Gitt følgende tallfølger:
a) $-3, -1, 1, 3, 5, \dots$
b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \dots$
c) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$
Finn den eksplisitte formelen, a_n, for n'te ledd i a), b) og c).
Finn den eksplisitte formelen, S_n, for summen av n ledd i a) og b)
Finn summen av 200 ledd i følgene i a) og b).
Finn summen av 200 ledd i følgen i c) ved hjelp av lommeregner.

a) Aritmetisk følge med $a_1 = -3$, $d = 2$:
$a_n = a_1 + d(n-1) = -3 + 2(n-1) = -3 + 2n - 2 = 2n - 5$
$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(-3 + (2n-5)) = \frac{n}{2}(2n-8) = n^2 - 4n$
$S_{200} = 200^2 - 4 \cdot 200 = 39\,200$

b) Geometrisk følge med $a_1 = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{3}$:
$a_n = a_1 k^{n-1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{n-1} = \frac{1}{2}\frac{(\frac{1}{3})^n}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}(\frac{1}{3})^n$
$S_n = a_1 \frac{k^n-1}{k-1} = \frac{1}{2}\frac{(\frac{1}{3})^n-1}{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{2}\frac{3((\frac{1}{3})^n-1)}{1-3} = \frac{1}{2}\frac{3((\frac{1}{3})^n-1)}{-2} =$
$\frac{3}{4}(1 - (\frac{1}{3})^n) = \frac{3}{4}(1 - \frac{1}{3^n})$
$S_{200} = \frac{3}{4}(1 - \frac{1}{3^{200}}) \approx 0.75$
(Konvergerer fort, kunne like godt brukt $S = \frac{a_1}{1-k}$!)

c) Ved å sammenligne med indeksen n, ser vi at:
$a_n = \frac{n+1}{n+2}$
S_{200}:
LR: Y1=(X+1)/(X+2)
sum(seq(Y1,X,1,200))
gir $S_{200} \approx 196$

II

Vann renner ut av en vanntank.
Antall liter vann som renner ut i løpet av et sekund, danner tilnærmet en geometrisk rekke, der $a_1 = 8$ [l] og $k = 0.96$.
a) Hvor mange liter vann renner ut i løpet av de første to minuttene?
b) Hvor mange liter vann er det i tanken totalt?

a) Vann som renner ut i 2 minutter (=120 sekunder):
$S_{120} = a_1 \frac{k^{120}-1}{k-1} = 8\frac{0.96^{120}-1}{0.96-1} \approx 199$ [l]

b) Når tanken er tom har alt rent ut, så volumet var:
$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{8}{1-0.96} = 200$ [l]

III

Vektløfteren Bjørn Råsterk tok sikte på få medalje i et VM ved hjelp av kosttilskuddet Super TS (Super Testo Steron), som ikke uventet stod på dopinglisten.
Anbefalt dose i døgnet var 1 gram. I bruksanvisningen Råsterk fikk av en østeuropeisk vektløfter, sto det at for hvert gram inntatt Super TS blir det lagret 2 mg av et sporstoff S i blodet.
Uheldigvis for Råsterk og likesinnede kunne sporstoffet S oppdages ved dopingkontroller.
Kroppen bryter ned 10% av dette sporstoffet løpet av et døgn.
Råsterk brukte anbefalt dose de siste 90 dagene før VM.
a) Hvor mye av sporstoffet hadde han i blodet den dagen VM startet?
Det viste seg at dopingkontrollen fikk positivt utslag på alle som hadde mer enn 1.0 mg sporstoff i blodet.
b) Hvis Råsterk ikke skulle ha blitt tatt i kontrollen, hvilket daglig inntak måtte han da ha hatt av Super Testo Steron?
Da Råsterk, noe skuffet, kom hjem etter VM og leste bruksanvisningen på nytt, oppdaget han at det ble anbefalt ikke å spise Super TS de siste ukene før en eventuell dopingkontroll.
c) Hvis Råsterk ikke skulle ha blitt tatt i kontrollen, men som før ha inntatt 1 gram Super TS i døgnet i 90 dager, hvor mange dager før VM måtte han da ha sluttet å spise Super TS?

a) Ved å fremføre de daglige dosene til den 91te dagen (VM startdagen) får vi:
Dag 1: $2 \rightarrow 2 \cdot 0.9^{90}$
Dag 2: $2 \rightarrow 2 \cdot 0.9^{89}$
...
Dag 90: $2 \rightarrow 2 \cdot 0.9^{1}$
Mengden sporstoff i blodet på dag 91 blir en geometrisk rekke med sum:
$2 \cdot 0.9 + 2 \cdot 0.9^2 + \ldots + 2 \cdot 0.9^{90}$
$S = a_1 \frac{k^n-1}{k-1} \approx \frac{a_1}{1-k} = \frac{2 \cdot 0.9}{1-0.9} = 18$ [mg] (Konvergerer mot 18 lenge før 90 dager.)

b)
Sammenheng sporstoff og Super Testo Steron:
$1STS = 0.002S = \frac{S}{500} \Leftrightarrow S = STS \cdot 500$
Daglig inntak: x gir betingelsen $\frac{x \cdot 0.9}{1-0.9} < 1 \Leftrightarrow x < 0.111$ [mg]
Dette svarer til daglig inntak av Super TS: $0.111 \cdot 500 \approx 56$ [mg]= 0.056 [gram]
c) Første dag uten dose har Råsterk $b_1 = 18$ [mg] sporstoff i blodet.
Dagen etter $b_2 = 18 \cdot 0.9$, dagen etter $b_3 = 18 \cdot 0.9^2$ osv.
n dager etterpå: $b_n = 18 \cdot 0.9^{n-1}$
Vi får: $18 \cdot 0.9^{n-1} < 1 \Leftrightarrow 0.9^{n-1} < \frac{1}{18} \Leftrightarrow (n-1)\ln 0.9 < \ln\frac{1}{18} \Leftrightarrow$
$n - 1 > \frac{\ln 1 - \ln 18}{\ln 0.9} \Leftrightarrow n > 1 - \frac{\ln 18}{\ln 0.9} \approx 28.4$
Råsterk klarer seg hvis VM er på den 29de dagen etter at inntaket ble avsluttet.
(28 dager mellom avslutning av inntak og start OL.)

IV

En følge er rekursivt definert av: $\left\{ \begin{array}{c} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n \cdot 3 - 2 \end{array} \right\}$

a) Skriv opp 5 ledd i denne følgen.
b) Hva slags følge er følgen gitt av $b_n = a_n - 1$?
c) Bruk dette til å finne et eksplisitt uttrykk for a_n.
Vi har en variant av geometrisk følge som har denne formelen:

$$a_n = a_1 k^{n-1} + b$$

der b er en tilleggskonstant som gjør at dette ikke er en geometrisk følge.
d) Vis at differansefølgen, $d_n = a_{n+1} - a_n$, for en slik følge blir: $d_n = a_1 k^{n-1}(k-1)$ og derfor er en geometrisk følge.
e) Ut fra d) kan vi også tenke omvendt; hvis en følge har en geometrisk følge som differansefølge gitt av $d_n = d_1 k^{n-1}$, så er følgen gitt av $a_n = \frac{d_1}{k-1} k^{n-1} + b$.
Bruk dette resultatet til å finne et eksplisitt uttrykk for a_n ut fra differansefølgen $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$

a) $a_n : 2, 4, 10, 28, 82, \ldots$

b) $b_n = a_n - 1 : 1, 3, 9, 27, 81, \ldots$
Vi ser at følgen er geometrisk med $b_1 = 1$ og $k = 3$.

c) $b_n = b_1 k^{n-1} = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1} = \frac{1}{3} 3^n$
$a_n = b_n + 1 = \frac{1}{3} 3^n + 1$

d) $d_n = a_{n+1} - a_n = a_1 k^{(n+1)-1} + b - (a_1 k^{n-1} + b) = a_1 k^n - a_1 k^{n-1} =$
$a_1 k^{n-1}(k-1) = a_1(k-1)k^{n-1}$ *QED*

e) Differansefølgen $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$ er geometrisk med $d_1 = 2$ og $k = 3$,
så vi får: $d_n = d_1 k^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$
Den opprinnelige følgen får vi ved å *dele med* $k - 1 = 3 - 1 = 2$ og *legge til* b:
$a_n = \frac{2 \cdot 3^{n-1}}{2} + b = 3^{n-1} + b$
b bestemmer vi ved hjelp av første ledd:
$a_1 = 3^{1-1} + b \Leftrightarrow 2 = 3^0 + b \Leftrightarrow b = 2 - 1 = 1$

): $a_n = 3^{n-1} + 1 = \frac{1}{3} 3^n - 1$ (Som stemmer med det vi fikk i c).)

V

Som kjent er trekanttallene gitt av $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Vi har en rekke: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \ldots a_n$.
a) Forklar at det generelle leddet er gitt av $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$.
b) Vis at $\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)}$.
c) Bruk denne alternative formuleringen, $a_n = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$ til å skrive ut noen ledd i rekken og forklar hvorfor summen av n ledd blir: $S_n = 2 - \frac{2}{n+1}$.
d) Bruk dette til å finne summen av den uendelige rekken
$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \ldots$

a) Nevnerne er trekanttallene, så vi får:
$a_n = \frac{1}{t_n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}$ *QED*

b) $\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n(n+1)} - \frac{2n}{(n+1)n} = \frac{2n+2-2n}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}$ *QED*

c) $S_n = (\frac{2}{1} - \frac{2}{2}) + (\frac{2}{2} - \frac{2}{3}) + (\frac{2}{3} - \frac{2}{4}) + \ldots + (\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1})$
Her ser vi at alle brøker, unntatt den første og siste, har motsatt fortegn og faller bort, så vi får: $S_n = \frac{2}{1} - \frac{2}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1}$ *QED*

(Hvis man ikke så dette poenget, kunne man bruke induksjonsbevis istedet.)

d) $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{2}{n+1} = 2$, da $\frac{2}{n+1}$ går mot null når n går mot uendelig.
): $S = 2$