R2 - Differensialligninger og Algebra - 30.03.2017

Oppgave 1

Gitt 3 tallfølger:

1) $4, 12, 36, 108, \ldots$ 2) $2, 7, 12, 17, \ldots$

3) $2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16,} \ldots$

a) Skriv opp det eksplisitte uttrykket for n'te ledd, a_n, for følgene over.

1) Geometrisk følge med $a_1 = 4, k = 3$:
$a_n = a_1 k^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1} = 4\frac{3^n}{3^1} = \frac{4}{3}3^n$

2) Aritmetisk følge med $a_1 = 2, d = 5$:
$a_n = a_1 + d(n-1) = 2 + 5(n-1) = 5n - 3$

3) Ved å omforme litt og sammenligne med indeksen n ;

n:	1	2	3	4
a_n:	$\frac{2}{1^2}$	$\frac{3}{2^2}$	$\frac{4}{3^2}$	$\frac{5}{4^2}$

ser vi at:

$$a_n = \frac{n+1}{n^2}$$

b) Finn summen av 100 ledd, $S_{100} = \sum_{i=1}^{100} a_i$, for følgene i 1) og 2).

1) Geometrisk: $S_n = a_1\frac{k^n-1}{k-1} = 4\frac{3^n-1}{3-1} = 2(3^n - 1)$

$$S_{100} = 2(3^{100} - 1) \approx 1.03 \cdot 10^{48}$$

2) Aritmetisk: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2 + 5n - 3) = \frac{n}{2}(5n - 1)$

$$S_{100} = \frac{100}{2}(500 - 1) = 50 \cdot 499 = 24950$$

c) Finn rekursive formler for tallfølgene over.

1) Geometrisk, hvert ledd multipliseres med $k = 3$: $\left\{ \begin{array}{c} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n \end{array} \right\}$

2) Aritmetisk, hvert ledd får differansen $d = 5$ addert: $\left\{ \begin{array}{c} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 5 \end{array} \right\}$

3) Egentlig ikke så mye vits i når vi har eksplisitt formel, men boken hadde slike oppgaver:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{(n+1)^2} - \frac{n+1}{n^2} = \frac{(n+2)n^2-(n+1)(n+1)^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{n^3+2n^2-n^3-3n^2-3n-1}{n^2(n+1)^2} =$$

$$\frac{-n^2-3n-1}{n^2(n+1)^2} = -\frac{n^2+3n+1}{n^2(n+1)^2}$$

Oppgave 2

Ferkenberg skal låne 250000 kr. til bilkjøp.
Lånet skal tilbakebetales med 5 like store innbetalinger (annuitetslån).
Den første innbetalingen skjer et år etter at lånet er tatt opp.
Hvor stor blir den årlige innbetalingen hvis banke vil ha 3.5% rente?

Må tegne tabell her:

Nåverdier:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\frac{x}{1.035}$	$\leftarrow \quad x$				
$\frac{x}{1.035^2}$	$\leftarrow$	$\leftarrow \quad x$			
$\frac{x}{1.035^3}$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow \quad x$		
$\frac{x}{1.035^4}$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow \quad x$	
$\frac{x}{1.035^5}$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow \quad x$
250000					

Kaller innbetalingene x og tilbakefører alle til lånetidspunkt (startverdi):

$$\frac{x}{1.035} + \frac{x}{1.035^2} + \frac{x}{1.035^3} + \frac{x}{1.035^4} + \frac{x}{1.035^5}$$

Ser at dette er en geometrisk rekke med:

$$a_1 = \frac{x}{1.035}, k = \frac{1}{1.035} \text{ og } n = 5,$$

så nåverdien av innbetalingene blir: $\frac{x}{1.035}\frac{(\frac{1}{1.035})^5-1}{(\frac{1}{1.035})-1} \approx 4.515052x$

Som må være lik låneverdien: $\quad 4.515052x = 250000 \Leftrightarrow$

Årlig innbetaling: $x = \frac{250000}{4.515052} \approx 55370$ [kr]

Oppgave 3

Bildet over viser hesteeier Luresen og travhesten Strøket rett etter at Luresen har tilført Strøket en daglig dose av det prestasjonsfremmende medikamentet Sprottex. Produsentene av Sprottex, som foretrekker anonymitet, anbefaler en daglig dose på 10 gram Sprottex.
For hvert gram Sprottex lagres det 5 mg av et sporstoff S i blodet på hesten.
Sporstoffet S i blodet brytes ned med 15% hvert døgn.
Luresen brukte anbefalt dose 10 gram Sprottex hvert døgn i 30 dager før et travløp.

a) Hvor mye av sporstoffet S hadde Strøket i blodet på løpsdagen?
(Anta at dosen gies hver morgen og at det går et døgn fra siste dose til løpet går. Bruk rekker i utregningene, selv om det også er mulig å gjøre denne oppgaven med differensialligninger.)

Pass på å skille mellom Sprottex og sporstoffet S!

10 g Sprottex gir $10 \cdot 5$ mg S = 50 mg S

I tabellform blir dette som sparing med faste beløp og rente.
Regner ut S i blodet i starten av hvert døgn etter inntak av ny dose:

$n = 1$	2	3	...	30	Løpsdag:
50	$50 \cdot 0.85$	$50 \cdot 0.85^2$	...	$50 \cdot 0.85^{29}$	$50 \cdot 0.85^{30}$
	50	$50 \cdot 0.85^1$	...	$50 \cdot 0.85^{28}$	$50 \cdot 0.85^{29}$
		50	...	$50 \cdot 0.85^{27}$	$50 \cdot 0.85^{28}$
			...	...	...
				50	$50 \cdot 0.85^1$

(*Obs*: Ingen ny dose løpsdag!)

Summen på løpsdagen blir en geometrisk rekke med

$a_1 = 50 \cdot 0.85$, $k = 0.85$ og $n = 30$ (antall rader)

Sporstoff S i blodet på løpsdagen:

$S_{30} = 50 \cdot 0.85\frac{0.85^{30}-1}{0.85-1} \approx 281$ [mg]

b) Strøket ble desverre tatt i dopingkontrollen, da det viste seg at grensen for deteksjon lå på 200 mg av sporstoffet S.
Hva er den maksimale dosen Sprottex Luresen kunne ha brukt hvis Strøket ikke skulle ha blitt tatt i kontrollen?

Maksimalt inntak av sporstoff S hvert døgn: x

Krav: $x \cdot 0.85\frac{0.85^{30}-1}{0.85-1} \leq 200 \Leftrightarrow 5.62x \leq 200 \Leftrightarrow x \leq \frac{200}{5.62} \Leftrightarrow$

$x \leq 35.6$ [mg S]

Da 1g Sprottex tilsvarer 5 mg S, tilsvarer dette:

$\frac{35.6}{5}$ [g Sprottex]= 7.12 [g Sprottex]

): Maksimal dose ca. 7.1 gram Sprottex.

Oppgave 4

En pendel har lengden $l = 2$ m. Pendelkulen har massen $m = 1$ kg og beveger seg i en væske slik at dempningsfaktoren blir $d = 4$ Ns/m.
Bevegelsen starter med at utslaget er $f(0) = 0.5$ m og at pendelkulen er i ro.

a) Forklar hvorfor differensialligningen for utslaget $f(t)$ blir:
$f'' + 4f' + 5f = 0$, hvis vi regner med små utslag og at $g = 10$ m/s^2.

Må lage en figur og markere positiv retning utover:
Newtons andre lov: $\sum F = ma$
$-$dempningskraft(friksjon)$-$fjærkraft= ma

$$-df' - \frac{mg}{l\cos\alpha}f = mf'' \Leftrightarrow f'' + \frac{d}{m}f' + \frac{g}{l\cos\alpha}f = 0$$

Med oppgitte tall og $\cos\alpha \approx 1$ får vi:

$$f'' + \frac{4}{1}f' + \frac{10}{2\cdot 1}f = 0 \Leftrightarrow f'' + 4f' + 5f = 0 \qquad QED$$

b) Vis at differensialligningen har den generelle løsningen:
$f(t) = e^{-2t}(C\sin t + D\cos t)$

Karakteristisk ligning: $r^2 + 4r + 5 = 0$

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -2 \pm i$$

Dette gir generell ligning: $e^{-2t}(C\sin t + D\cos t) \qquad QED$

c) Finn den spesielle løsningen av differensialligningen.

Initialbetingelsen $f(0) = 0.5$ gir: $0.5 = 1(C \cdot 0 + D \cdot 1) \Leftrightarrow D = 0.5$

Så langt: $f(t) = e^{-2t}(C\sin t + 0.5\cos t)$

$$f'(t) = e^{-2t}(-2)(C\sin t + 0.5\cos t) + e^{-2t}(C\cos t - 0.5\sin t) =$$
$$e^{-2t}((C-1)\cos t - (2C+0.5)\sin t)$$

Initialbetingelsen $f'(0) = 0$ (I ro i starten!) gir:

$$0 = 1((C-1)1 - (2C+0.5)0) \Leftrightarrow 0 = C - 1 \Leftrightarrow C = 1$$

): Spesiell løsning: $f(t) = e^{-2t}(\sin t + 0.5\cos t)$

Oppgave 5

Vi har en tallfølge a_n: 2, 7, 14, 23, 34, ...

a) Bruk tabell og differanser til å finne a_6, a_7 og a_8 og $S_8 = \sum_{i=1}^{8} a_i$.

Vi lager tabell og bygger ut nedenfra:

n**:**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
a_n:	2	7	14	23	34	**47**	**62**	**79**
∇a_n:	5	7	9	11	**13**	**15**	**17**	
$\nabla^{(2)} a_n$:	2	2	2	**2**	**2**	**2**		

): $a_6 = 47$, $a_7 = 62$, $a_8 = 79$

$$S_8 = 2 + 7 + 14 + 23 + 34 + 47 + 62 + 79 = 268$$

(Kunne også bygd opp en rad over a_n og funnet summen som $A_9 = 268$:

n**:**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
A_n:	0	2	9	23	46	80	127	189	268
a_n:	2	7	14	23	34	47	62	79	

fordi $\sum_{i=1}^{8} a_i = A_9 - A_1$, når $\nabla A_n = a_n$)

b) Vis at differansefølgen $d_n = a_{n+1} - a_n$ har den eksplisitte formelen $d_n = 2n + 3$.

Vi ser av første tabell i a), at d_n er aritmetisk med første ledd $a_1 = 5$ og differanse $d = 2$, så vi får:
$d_n = d_1 + d(n-1) = 5 + 2(n-1) = 2n + 3$ *QED*

c) Vis at a_n har den rekursive formelen $\{a_1 = 2, \ a_{n+1} = a_n + (2n+3)\}$.

$$\nabla a_n = a_{n+1} - a_n = d_n = 2n + 3 \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + 2n + 3$$

Så vi har: $\left\{ \begin{array}{rl} a_1 &= 2 \\ a_{n+1} &= a_n + 2n + 3 \end{array} \right\}$ *QED*

d) Ut fra tabellen kan vi se at a_n må ha en eksplisitt formel som er et andregradspolynom, og at vi har sammenhengen $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$, der $d_n = a_{n+1} - a_n$.
Bruk denne formelen til å vise at $a_n = n^2 + 2n - 1$.

Da d_n er aritmetisk og $\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{n}{2}(d_1 + d_n)$, har vi:

$$a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i = a_1 + \tfrac{n-1}{2}(d_1 + d_{n-1}) =$$

$$2 + \tfrac{n-1}{2}(5 + (2(n-1) + 3)) = 2 + \tfrac{n-1}{2}(2n + 6) =$$

$$2 + (n-1)(n+3) = n^2 + 2n - 1 \qquad QED$$

e) Skriv opp nødvendige GeoGebra-kommandoer for å finne en generell formel for summen $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

a(n):=n^2+2 n-1
S(n):=Sum[a(i),i,1,n] (som vil gi: $S(n) = \frac{n(2n^2+9n+1)}{6}$)

Eller brukt **RegPoly[{(1,2),(2,9),(3,23),(4,46)}, 3]** da vi vet at S(n) må være av tredje grad.

Kunne også brukt differanseregning:

$$a_n = n^2 + 2n - 1 = n^2 - n + n + 2n - 1 = n^{(2)} + 3n - 1$$
$$A_n = \tfrac{1}{3}n^{(3)} + \tfrac{3}{2}n^{(2)} - n + C$$

Velger $C = 0$ og får da:

$$S_n = A_{n+1} - A_1 = \left(\tfrac{1}{3}(n+1)^{(3)} + \tfrac{3}{2}(n+1)^{(2)} - (n+1)\right) - (-1) =$$

$$\frac{2(n+1)n(n-1)+9(n+1)n-6(n+1)+6}{6} = \frac{2n(n^2-1)+9n^2+9n-6n-6+6}{6} = \frac{2n^3-2n+9n^2+3n}{6} =$$
$$\frac{2n^3+9n^2+n}{6} = \frac{n(n^2+9n+1)}{6}$$
