K 6.6 - Andre Ordens Differensialligninger

H-P Ulven, 03.04.09

Innhold:

- Terminologi
- Utvikling av regel for løsning av $y'' + ay' + by = 0$ (Tilfelle: $y = Ce^{r_1x} + De^{r_2x}$)
- Utvikling av regel for løsning av $y'' + ay' + by = 0$ (Tilfelle: $y = e^{\alpha x}(C\sin\beta x + D\cos\beta x)$)
- Hvordan finne komplekse løsninger i andregradsligninger
  - Eksempel på manuell utregning
  - Lommeregnerprogram
- Eulers formel

Eksempler:

a) $y'' + 3y' - 8y = 0$ b) $y'' + 3xy' - 8e^xy = 0$

c) $y'' + 3y' - 8y = 2x$ d) $y'' + 3y' - 8y^2 = 0$

Terminologi:

a) Andre ordens lineær, homogen differensialligning med konstante koeffisienter.
b) Andre ordens lineær, homogen differensialligning.
c) Andre ordens lineær differensialligning med konstante koeffisienter.
d) Andre ordens ulineær, homogen differensialligning med konstante koeffisienter

(Lineær: Ingen potenser av y –er, uansett om de er derivert eller ikke.)

Vi vil i hovedsak lære å løse andre ordens, lineære, ***homogen***e differensialligninger med ***konstante*** koeffisienter.

Læreplanen sier:

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

løse ***andre ordens homogene*** differensiallikninger

og

bruke Newtons andre lov til å beskrive frie svingninger ved periodiske funksjoner

Dette er uklart, da det ***ikke*** står noe om ***konstante*** koeffisienter,
men de fleste lærebokforfattere og lærere er enige om at det ikke er rimelig å kunne løse andre orden sligninger som ikke har konstante koeffisienter.

For de som ikke tar sjansen, skal jeg lage et eget notat om mulige teknikker når koeffisientene ikke er konstante. :-)

Utgangspunkt:

Vi prøver å generalisere våre kunnskaper fra første ordens differensialligninger:

$y' - ky = 0$ har løsningen $y = Ce^{kx}$

Hvis vi deriverer denne ligningen får vi vår første andre ordens ligning:
$y'' - ky' = 0$ som må ha samme løsning $y = Ce^{kx}$.

Men, hvis vi tenker oss om, så innser vi at også $y = D$ må være en løsning, eller $y = De^{0x}$ (!).

$y'' - ky' = 0$ har altså løsningen $Ce^{kx} + De^{0x}$

Her er k og 0 løsninger av andregradsligningen $r^2 - kr = 0$! Sammenlign med $y'' - ky' = 0$!

Hypotetisk spørsmål:
Kan vi alltid erstatte $y^{(n)}$ med r^n i differensialligningen $y'' + ay' + b = 0$,
lage en andregradsligning $r^2 + ar + b = 0$ og
bruke løsningene r_1 og r_2 til å lage løsningen $y = Ce^{r_1x} + De^{r_2x}$?!?

Vi forsker videre:

$y'' - k^2y = 0$

I kapittel 6.7 - "Flere teknikker" skal vi se på noen triks, et av dem kommer her:

Vi skriver om til: $y'' = k^2y$
Multipliserer med $2y'$: $2y'y'' = 2k^2yy'$

Gjør et variabelskifte: $u = (y')^2$ som har $u' = 2y'(y')' = 2y'y''$!

Derfor har vi: $(y')^2 = 2k^2\int yy'dx = 2k^2\int ydy$ (Kjerneregel igjen!)

Og får: $(y')^2 = 2k^2\frac{y^2}{2} + D = k^2y^2 + D$

Det enkleste er ofte det beste (REMA 1000) så vi setter $D = 0$
og får: $y' = \pm\sqrt{k^2y^2} = \pm ky$ (Derfor vi brukte k^2 og ikke k...)

Så løser vi $y' = ky$ og $y' = -ky$ og får den samlede løsningen $y = Ce^{kx} + De^{-kx}$

Igjen er k og $-k$ løsninger av den såkalt "karakteristiske" andregradsligningen

$r^2 - k^2 = 0$, så dette ser lovende ut!

La oss teste på det generelle tilfellet:

$y'' + ay' + by = 0$

Vi tester hva r må være hvis Ce^{rx} skal bli en løsning:

$$y' = (Ce^{rx})' = Cre^{rx}$$
$$y'' = (Cre^{rx})' = Cr^2e^{rx}$$

VS blir da: $y'' + ay + b = Cr^2e^{rx} + aCre^{rx} + bCe^{rx} = Ce^{rx}(r^2 + ar + b)$
Hvis Ce^{rx} skal være løsning, så må altså $Ce^{rx}(r^2 + ar + b) = 0 \Leftrightarrow r^2 + ar + b = 0$

Altså får vi to eksponentialfunksjoner som løsninger e^{r_1x} og e^{r_2x},
der r_1 og r_2 er løsninger av den karakteristiske ligningen $r^2 + ar + b = 0$.

Da har vi studert $r^2 + ar + b = 0$ og $r^2 - ar = 0$.

Hva om vi bare har ***en*** løsning i den karakteristiske ligningen?

$$(r - a)^2 = 0 \text{ eller } r^2 - 2ar + a^2 = 0$$

Dette tilsvarer differensialligningen: $y'' - 2ay' + a^2y = 0$

Vi trikser litt igjen:

$$VS = y'' - ay' - ay' + a^2y = (y'' - ay') - a(y' - ay) = u' - au, \text{ der } u = y' - ay$$

Så vi omformer til $u' - au = 0$, løser og får $u = Ce^{ax}$ som igjen gir: $y' - ay = Ce^{ax}$

Med integrerende faktor $IF = e^{-ax}$ får vi: $\qquad (ye^{-ax})' = C$

Som gir: $\qquad ye^{-ax} = Cx + D$

Og dermed har vi løsningen: $\qquad y = (Cx + D)e^{ax}$ som er et lite unntak fra hovedregelen.

Regel:

(Så langt; når den karakteristiske andregradsligningen har løsninger.)

$y'' + ay' + b = 0 \qquad$ har løsningen:

$y = Ce^{r_1x} + De^{r_2x} \qquad$ hvis $r^2 + ar + b = 0$ har to løsninger r_1 og r_2.

$y = (Cx + D)e^{r_1x} \qquad$ hvis $r^2 + ar + b = 0$ bare har ***en*** løsning r_1.

Komplekse tall

Det naturlige nå er vel å anta at hvis $r^2 + ar + b = 0$ ikke har løsning, så
har heller ikke differensialligningen noen løsning, ***men dette er feil***!

Det er umulig å gi noen tilfredsstillende forklaring og bevis for det som skjer i dette tilfellet
innenfor rammen av R2, så her må vi nøye oss med å gi litt av bakgrunnen og en regel og

metodikk, uten formelle bevis og forståelse.

(Jeg misliker dette sterkt og skulle derfor ønske at andreordens ligninger ikke var med i læreplanen. Begrunnelsen har nok vært svingninger og trigonometriske funksjoner, men i og med at ikke alle som tar R2 har fysikk, synes jeg dette argumentet er litt pussig...)

Eksempel:

$y'' + k^2 y = 0$ har løsningen $y = C\sin kx + D\cos kx$

da

$y' = Ck\cos kx - Dk\sin kx$

$y'' = -Ck^2\sin kx - Dk^2\cos kx$

slik at: $VS = (-Ck^2\sin kx - Dk^2\cos kx) + k^2(C\sin kx + D\cos kx) = 0$!

Karakteristisk ligning her er $r^2 + k^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -k^2 \Leftrightarrow$

$r = \pm\sqrt{-k^2} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{k^2} = \pm\sqrt{-1}\,k$ og det går jo ikke an! Eller?

Euler og andre fant ut at det kunne være nyttig å la det gå an likevel (!) og innførte derfor såkalte ***komplekse/imaginære tall***, hvor den imaginære ***enheten*** er $i = \sqrt{-1}$.

Da får plutselig alle andregradsligninger løsninger (!) som kan skrives på den komplekse formen $\alpha + \beta i$, der $i = \sqrt{-1}$ eller sagt på en annen måte $i^2 = -1$.

Eksempler:

$y'' + 9y = 0$:

$r^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow r^2 - (-9) = 0 \Leftrightarrow r^2 - 9i^2 = 0 \Leftrightarrow (r - 3i)(r + 3i) = 0$

$r = -3i \vee r = 3i$

$y = C\sin(3x) + D\cos(3x)$

(Da $\sin(-x) = -\sin x$ og $\cos(-x) = \cos x$ vil alternativet ($r = -3i$) gi

$y = E\sin(-3x) + F\cos(-3x) = -E\sin(3x) + F\cos(3x)$

men dette er kan puttes inn i det første alternativet ($r = 3i$) ved å justere integrasjonskonstantene.)

$y'' + 2y' + 5 = 0$:

$r^2 + 2r + 5 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1} = \frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{16}\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm 2i$

$y = C\sin 2x + D\cos 2x$ burde da bli en del av løsningen ut fra $\pm 2i$,

men hvordan få med den reelle delen -1 ?

Det viser seg at den generelle løsningen blir:

$y = e^{-x}(C\sin 2x + D\cos 2x)$

Endelig regel:

$y'' + ay' + b = 0$ har løsningen:

$y = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$	hvis $r^2 + ar + b = 0$ har ***to*** løsninger r_1 og r_2.
$y = (Cx + D)e^{r_1 x}$	hvis $r^2 + ar + b = 0$ bare har ***en*** løsning r_1.
$y = e^{\alpha x}(C \sin \beta x + D \cos \beta x)$	hvis $r^2 + ar + b = 0$ har ***komplekse*** løsninger $\alpha \pm \beta i$.

(Obs: βi opptrer alltid i par ($\pm\beta i$), så hvis det er komplekse løsninger, så er begge løsningene komplekse!
Vi kan ikke få en reell og en kompleks løsning!)

Hvordan finne komplekse løsninger i andregradsligninger

Manuelt

Vi må kunne løse dette ***manuelt***, de kan gi differensialligninger på den delen av eksamen som går ***uten hjelpemidler***!

$y'' + 10y' + 29y = 0$ gir karakteristisk ligning: $r^2 + 10r + 29 = 0$

$r = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 29}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{-1}\,\sqrt{16}}{2} =$ (Det er her vi skiller ut $i = \sqrt{-1}$!) $\frac{-10 \pm 4i}{2} = -5 \pm 2i$

Altså har differensialligningen løsningen:

$$y = e^{-5x}(C \sin 2x + D \cos 2x)$$

Lommeregnerprogram

Men det er selvfølgelig kjekt å ha det på lommeregner:

```
:Input "A: ",A
:Input "B: ",B
:Input "C: ",C
:-B/2/A→R
:B ^2-4*A*C→D
:If D≥0:Then
:√ (D)/2/A→D
:Disp "X1: ",R+D
:Disp "X2: ",R-D
:Else
:√ (-D)/2/A→ D
:Disp "KOMPLEKSE:"
:Disp "REELL DEL: ",R
:Disp "IMAGINAR DEL: ",D
:End
```

:Stop

Sluttkommentar - Eulers formel:

Eulers samlet alt dette i den berømte formelen

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Denne formelen og Einsteins $E = mc^2$ er de to mest berømte formler i matematikken!

Med denne kunne vi egentlig brukt den første regelen med eksponentialfunksjoner også på sinus- og cosinustilfellet:

$$y'' + ay' + b = 0 \qquad \text{gir} \qquad r^2 + ar + b = 0$$

Med komplekse løsningene $r = \alpha \pm i\beta$

får vi da løsningen $\quad y = Ce^{(\alpha+i\beta)x} + De^{(\alpha-i\beta)x} = Ce^{\alpha x}e^{i\beta x} + De^{\alpha x}e^{-i\beta x}$

Bruker vi Eulers formel får vi videre:

$$y = Ce^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + De^{\alpha x}(\cos(-\beta x) + i\sin(-\beta x)) =$$

$$Ce^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + De^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)) =$$

$$(C + D)e^{\alpha x}\cos\beta x + (Ci - Di)e^{\alpha x}\sin\beta x =$$

$$C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

Ren magi spør du meg, stort morsommere og mer interessant blir det sjelden! :-)