R2 - kapittel 5 EF og 6 ABCD

Løsningsskisser

Oppgave 1

Løs differensialligningene:

a) $y' + x = \cos x$ b) $y' = yx + x$

c) $y' = 1 + \frac{y}{x}$

a) Eksakt DL, løses direkte: $y' = \cos x - x$
$y = \int(\cos x - x)dx = \sin x - \frac{1}{2}x^2 + C$

b) Lineær: $y' - xy = x$ (Kan løse med $IF = e^{-\int x dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$)
Er også separabel: $y' = x(y+1)$

$y \neq -1$:
$\int \frac{y'}{y+1}dx = \int x dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y+1}dy = \int x dx \Leftrightarrow$
$\ln|y+1| = \frac{x^2}{2} + C_1 \Leftrightarrow |y+1| = e^{\frac{x^2}{2}+C_1} \Leftrightarrow y + 1 = Ce^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow$
$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$

$y = -1$ er også løsning, men er dekket av $C = 0$.

): $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$

(Løser med integrerende faktor for eksemplets skyld:
$y' + (-x)y = x,$ $IF = e^{-\int x dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$(ye^{-\frac{x^2}{2}})' = xe^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow ye^{-\frac{x^2}{2}} = \int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$

Variabelskifte gir $\int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = \int xe^u \frac{du}{-x} = -\int e^u du = C - e^u = C - e^{-\frac{x^2}{2}}$

$ye^{-\frac{x^2}{2}} = C - e^{-\frac{x^2}{2}}$

): $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$)

c) Lineær ligning, løser mer integrerende faktor:
$y' - \frac{1}{x}y = 1,$ $IF = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$

(Mange roter her med $e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ og potensregler!)

$y'\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow (y\frac{1}{x})' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \int \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \ln|x| + C \Leftrightarrow$

$y = x\ln|x| + Cx$

(Kunne også bruke brøkregel direkte, hvis man ser det:

$$y'x - y = x \Leftrightarrow \frac{y'x - y1}{x^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow (\frac{y}{x})' = \frac{1}{x} \quad)$$

Oppgave 2

Vis at differensialligningen $y' = y - y^2$ har den generelle løsningen $y = \frac{1}{1+Ce^{-x}}$.

Finn den spesielle løsningen som har initialbetingelsen $y(0) = \frac{1}{4}$.

Kan enten *løse ligningen* (se lengre ned), eller *vise med innsetting*:

$y = (1 + Ce^{-x})^{-1} \Rightarrow y' = -(1 + Ce^{-x})^{-2}(-Ce^{-x})$ (Kjerneregel med $u = 1 + Ce^{-x}$)

$y' = \frac{Ce^{-x}}{(1+Ce^{-x})^2}$

$VS = y' = \frac{Ce^{-x}}{(1+Ce^{-x})^2}$

$HS = \frac{1}{1+Ce^{-x}} - (\frac{1}{1+Ce^{-x}})^2 = \frac{1+Ce^{-x}-1}{(1+Ce^{-x})^2} = \frac{Ce^{-x}}{(1+Ce^{-x})^2}$

$HS = VS$, så $y = \frac{1}{1+Ce^{-x}}$ er generell løsning.

Kunne, som sagt, også ha løst ligningen:

Ulineær, så vi må separere:

$y \neq 0, y \neq 1$:

$\frac{y'}{y-y^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y'}{y(1-y)} = 1 \Leftrightarrow (\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y})y' = 1$ (Delbrøkoppspalting)

$\int(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y})y'dx = \int 1dx \Leftrightarrow \int(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y})dy = \int 1dx \Leftrightarrow$

$\ln|y| - \ln|1 - y| = x + C_1 \Leftrightarrow \ln|\frac{y}{1-y}| = x + C_1 \Leftrightarrow \frac{y}{1-y} = C_2e^x \Leftrightarrow$

$y = C_2e^x - yC_2e^x \Leftrightarrow y + yC_2e^x = C_2e^x \Leftrightarrow y(1 + C_2e^x) = C_2e^x \Leftrightarrow$

$y = \frac{C_2e^x}{1+C_2e^x} = \frac{1}{\frac{1}{C_2}e^{-x}+1} = \frac{1}{1+Ce^{-x}}$ *QED*

$y = 0$ og $y = 1$ er også løsninger. $y = 1$ tilsvarer $C = 0$.

Så egentlig er den generelle løsningen $y = \frac{1}{1+Ce^{-x}} \vee y = 0$, så oppgaveteksten er derfor ikke helt korrekt.

Initialbetingelsen $y(0) = \frac{1}{4}$ gir: $\frac{1}{1+Ce^0} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow C + 1 = 4 \Leftrightarrow C = 3$

Spesiell løsning: $y = \frac{1}{1+3e^{-x}}$

Oppgave 3

En plastflaske tømmes for vann gjennom et hull i bunnen.
Det kan vises at høyden på vannstanden inne i flasken, $h(t)$, er gitt ved differensialligningen

$h' = -0.0108\sqrt{h}$, der $h(t)$ måles i meter og t i sekunder.

a) Vis at $h(t) = (C - 0.0054t)^2$ er en generell løsning av differensialligningen.

b) Bestem den spesiell løsningen når $h(0) = 0.20$ meter.

a) Kan vise ved *innsetting*:
Kjerneregel: $h(t) = (C - 0.0054t)^2 = u^2, \quad u = C - 0.0054t$
$h'(t) = 2(C - 0.0054t)(-0.0054) = -0.0108(C - 0.0054t)$

$VS = h'(t) = 0.0108(0.0054t - C)$

$HS = -0.0108\sqrt{h(t)} = -0.0108\sqrt{(C - 0.0054t)^2} = -0.0108(C - 0.0054t)$

): $VS = HS$, så $h(t) = (C - 0.0054t)^2$ er løsning av differensialligningen.

(Egentlig feil å si "generell" i oppgaven, da $h(t) = 0$ også er en løsning!)

Kan også *løse* ligningen istedenfor å vise med innsetting:
Separabel:
$h \neq 0$:
$\frac{h'}{\sqrt{h}} = -0.0108 \Leftrightarrow h^{-\frac{1}{2}}h' = -0.0108 \Leftrightarrow \int h^{-\frac{1}{2}}h'dt = -\int 0.0108dt \Leftrightarrow$
$\int h^{-\frac{1}{2}}dh = -\int 0.0108dt \Leftrightarrow \frac{h^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = -0.0108t + C_1 \Leftrightarrow$
$2h^{\frac{1}{2}} = C_1 - 0.0108t \Leftrightarrow h^{\frac{1}{2}} = C - 0.0054t \Rightarrow h = (C - 0.0054t)^2$
$h = 0$ er også løsning (vises ved innsetting), så den generelle løsningen er egentlig:

$$h(t) = 0 \vee h(t) = (C - 0.0054t)^2$$

b) Initialbetingelsen $h(0) = 0.20$ gir: $0.2 = C^2 \Leftrightarrow C = \pm\sqrt{0.2} \approx \pm 0.45$
(Forkaster negativ C, da dette ikke er aktuelt i dette praktiske tilfellet. $h(t)$ ville da stige for positive t! Matematikken dekker både den virtuelle og virkelige verden og vet ikke at vann ikke renner oppover og inn i flasken, så vi må tilpasse våre matematiske modeller til virkeligheten.)

Spesiell løsning: $h(t) = (0.45 - 0.0054t)^2$

Oppgave 4

En kuleflate α har ligningen $x^2 - 6x + y^2 + z^2 = 0$.

a) Bestem sentrum S og radius R i kuleflaten.

b) En rett linje har parameterfremstillingen $l : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{array} \right\}$

Finn skjæringspunktene A og B mellom linjen l og kuleflaten α.

c) Finn ligningene for planene som tangerer kuleflaten i punktene A og B.

d) Finn radien i skjæringssirkelen mellom kuleflaten og et plan som har avstanden $a = 1$ fra sentrum S i kuleflaten.

a) Lager fulle kvadrater:
$x^2 - 6x + 3^2 + y^2 + z^2 = +3^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 + z^2 = 3^2$

): Sentrum: $S = (3,0,0)$, Radius: $R = 3$

b) På l og α samtidig gir: $((3+t)-3)^2 + (2t)^2 + (2t)^2 = 3^2 \Leftrightarrow$
$9t^2 = 3^2 \Leftrightarrow t = \pm 1$

$t = 1$ gir: $A = (3+1, 2\cdot 1, 2\cdot 1) = (4,2,2)$
$t = -1$ gir: $B = (3-1, 2(-1), 2(-1)) = (2,-2,-2)$

c) $\overrightarrow{SA} = [1,2,2]$, $\overrightarrow{SB} = [-1,-2,-2]$
Vi ser at $\overrightarrow{SA} = -\overrightarrow{SB}$, så $\overrightarrow{SA}$ og $\overrightarrow{SB}$ er parallelle.
AB er derfor diameter i kuleflaten og går gjennom sentrum S!
De to planene er derfor parallelle og kan bruke samme normalvektor,
velger her $\vec{n} = \overrightarrow{SA} = [1,2,2]$

Plan β gjennom A gitt av $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$, der $P = (x,y,z)$ i β:
$[x-4, y-2, z-2] \cdot [1,2,2] = 0 \Leftrightarrow$
$x + 2y + 2z - 12 = 0$

Plan γ gjennom B gitt av $\overrightarrow{BP} \cdot \vec{n} = 0$, der $P = (x,y,z)$ i γ:
$[x-2, y+2, z+2] \cdot [1,2,2] = 0 \Leftrightarrow$
$x + 2y + 2z + 6 = 0$

d) En figur viser at radien r i skjæringssirkelen er gitt av:
$r = \sqrt{R^2 - a^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.83$

(Glemte å spørre om sentrum T i skjæringssirkelen.
Den kunne vi funnet slik:
$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OS} + a \cdot \vec{e} = \overrightarrow{OS} + a\frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n} = [3,0,0] + 1 \cdot \frac{1}{3}[1,2,2] = [\frac{10}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$
): $T = (\frac{10}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$)

Oppgave 5

Byen Honolulu på Hawaii ligger på 21.3° nordlig bredde og 158.9° vestlig lengde.
Byen Kabul i Afghanistan ligger på 34.5° nordlig bredde og 69.1° østlig lengde.

Finn korteste avstand (langs jordens overflate) mellom Hawaii og Kabul.

Vi bruker denne parameterfremstillingen for jordoverflaten:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = R \cdot \cos u \cdot \cos v \\ y = R \cdot \cos u \cdot \sin v \\ z = R \cdot \sin u \end{array} \right\}, \quad \text{der } R = 6400 \text{ km.}$$

Koordinater til Honolulu:
$x = 6400 \cdot \cos(21.3°) \cdot \cos(-158.9°) = -5563$
$y = 6400 \cdot \cos(21.3°) \cdot \sin(-158.9°) = -2147$
$z = 6400 \cdot \sin(21.3°) = 2325$

Som vektor fra Origo: $\overrightarrow{OH} = [-5563, -2147, 2325]$

Koordinater til Kabul:

$x = 6400 \cdot \cos(34.5^\circ) \cdot \cos(69.1^\circ) = 1882$
$y = 6400 \cdot \cos(34.5^\circ) \cdot \sin(69.1^\circ) = 4927$
$z = 6400 \cdot \sin(34.5^\circ) = 3625$

Som vektor fra Origo: $\overrightarrow{OK} = [1882, 4927, 3625]$

Vinkel mellom stedsvektorene gitt av:

$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK}}{|\overrightarrow{OH}||\overrightarrow{OK}|} = \frac{\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK}}{R^2} = \frac{[-5563, -2147, 2325] \cdot [1882, 4927, 3625]}{6400^2} = -0.30810$
$\alpha = 1.88$ [rad]

Avstanden Honolulu - Kabul langs storsirkel:

$b = \alpha \cdot R = 1.88 \cdot 6400 \approx 12000$ [km]