

R2 - 6.1 - 6.5 Differensialligninger

11.04.13

Løsningskisser

Oppgave I

Finn generelle løsninger av differensialligningene:

a) $y' + x = \sin x$

b) $y' - y = 0$

c) $2y' + y = 0$

d) $y' = x - yx$

e) $xy' + y = x$

f) $xy' + 3y = x$

g) $y' + \frac{x}{y} = 0$

a) Eksakt ligning: $y' = \sin x - x$
 $y = \int (\sin x - x) dx = -\cos x - \frac{1}{2}x^2 + C$

b) Både separabel og lineær, kan velge å separere eller bruke integrerende faktor.

Separerer: $y' = y$

$y \neq 0$:

$$\int \frac{y'}{y} dx = \int dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int dx \Leftrightarrow \ln|y| = x + C_1 \Leftrightarrow |y| = e^{x+C_1}$$

$$y = Ce^x$$

($y = 0$ er inkludert i tilfellet $C = 0$.)

c) $y \neq 0$:

$$2\frac{y'}{y} = -1$$

$$\int \frac{y'}{y} dx = -\frac{1}{2} \int dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{2} \int dx \Leftrightarrow \ln|y| = -\frac{1}{2}x + C_1$$

$$|y| = e^{-\frac{x}{2}+C_1}$$

$$y = Ce^{-\frac{x}{2}} \quad (y = 0 \text{ er inkludert i tilfellet } C = 0.)$$

d) $y' = x(1 - y)$

$y \neq 1$:

$$\frac{y'}{1-y} = x \Leftrightarrow \int \frac{1}{1-y} dy = \int x dx \Leftrightarrow -\ln|1-y| = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$|1-y| = e^{-\frac{x^2}{2}-C_1} \Leftrightarrow 1-y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y = 1 - Ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

($y = 1$ er inkludert i tilfellet $C = 0$.)

$$e) xy' + y = x$$

Ikke separabel, men lineær, så vi kan bruke integrerende faktor på $y' + \frac{1}{x}y = 1$, men her ser vi direkte:

$$(xy)' = x \Leftrightarrow xy = \int x dx \Leftrightarrow xy = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$$

$$f) xy' + 3y = x$$

Ikke separabel, men lineær: $y' + \frac{3}{x}y = 1$,

$$IF = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \ln x} = e^{\ln x^3} = (e^{\ln x})^3 = x^3$$

$$x^3 y' + 3x^2 y = x^3 \Leftrightarrow (x^3 y)' = x^3 \Leftrightarrow x^3 y = \int x^3 dx$$

$$x^3 y = \frac{x^4}{4} + C$$

$$y = \frac{x}{4} + \frac{C}{x^3}$$

$$g) y' + \frac{x}{y} = 0 \Leftrightarrow yy' = -x \Leftrightarrow \int y dy = -\int x dx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C_1$$

$$x^2 + y^2 = 2C_1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2 \quad (R = \sqrt{2C_1})$$

Oppgave II

Vi har gitt differensialligningen $y' = -0.011\sqrt{y}$.

a) Hvilket stigningstall har integralkurven gjennom punktet $(0, 0.1)$ i dette punktet?

b) Finn den generelle løsningen til differensialligningen.

c) Finn den spesielle løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsen $y(0) = 0.15$.

d) y er høyden på vannet i en tank når vannet renner ut gjennom et hull i bunnen av tanken og $y(0)$ er høyden i meter. Hvor mange sekunder tar det før tanken er tom, hvis den uavhengige variabelen er tiden i sekunder?

$$a) \text{ Stigningstall i } (0, 0.1): y' = -0.011\sqrt{0.1} \approx -0.0035$$

b) Separabel:

$y \neq 0$:

$$y^{-\frac{1}{2}} y' = -0.011 \Leftrightarrow \int y^{-\frac{1}{2}} dy = -0.011 \int dx$$

$$\frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = -0.011x + C_1 \Leftrightarrow 2\sqrt{y} = C_1 - 0.011x$$

$$\sqrt{y} = C - 0.0055x$$

$$y = (C - 0.0055x)^2$$

$y = 0$ er også løsning, og ikke inkludert i den første løsningen.

$$): \quad y = (C - 0.0055x)^2 \vee y = 0 \quad (\text{Generell løsning.})$$

$$c) y(0) = 0.15 \Rightarrow 0.15 = (C - 0)^2 \Leftrightarrow C = \pm \sqrt{0.15} \approx \pm 0.39$$

$$y = (\pm 0.39 - 0.0055x)^2 \quad (\text{Spesiell løsning.})$$

d)

Her får vi vite hvilket praktisk tilfelle dette dekker, og da ser vi at løsningen $y = 0$ ikke kan brukes og at tilfellet $C = -0.39$ ikke kan brukes.

$$\text{Tom tank når } y = 0: \quad (0.39 - 0.0055x)^2 = 0$$

$$\text{Det tar: } x = \frac{0.39}{0.0055} \approx 71 \text{ [sekunder].}$$

Oppgave III

En innsjø inneholder 5000000 m^3 vann. Innsjøen er forurenset med 5 tonn av et giftig stoff sluppet ut av en fabrikk som myndighetene stengte ved tidspunktet $t = 0$ [døgn]. Ut fra innsjøen går det en elv der det passerer 1500 m^3 vann hvert døgn, tilsvarende for elven inn til innsjøen.

a) Forklar at giftmengden y [tonn] i innsjøen er gitt ved differensialligningen $y' = -0.0003y$.

b) Løs differensialligningen

c) Finn ut når giftmengden i innsjøen har blitt 1 tonn.

a) Endringshastighet [tonn/døgn] = Tilførsel[tonn/døgn] - Ut [tonn/døgn]

Derivert = 0 - konsentrasjon \cdot vannføring

$$y' = 0 - \frac{y}{V}g$$

$$y' = -\frac{y}{5000000}1500$$

$$y' = -0.0003y$$

b) $y' = -ky$

$$y \neq 0: \quad \int \frac{y'}{y} dt = -\int k dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = -\int k dt \Leftrightarrow \ln|y| = -kt + C_1$$

$$|y| = e^{-kt+C_1} \Leftrightarrow y = Ce^{-kt} \quad (\text{der } y = 0 \text{ er inkludert i tilfellet } C = 0.)$$

$$\text{Generell løsning: } y = Ce^{-0.0003t}$$

$$\text{Initialbetingelse: } y(0) = 5 \text{ [tonn]}$$

$$\text{Gir: } 5 = C$$

$$\text{Spesiell løsning: } y = 5e^{-0.0003t}$$

c) Giftmengden er 1 tonn når: $1 = 5e^{-0.0003t} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = e^{-0.0003t} \Leftrightarrow$

$$\ln \frac{1}{5} = -0.0003t \Leftrightarrow t = \frac{\ln 1 - \ln 5}{-0.0003} = \frac{-\ln 5}{0.0003} \approx 5400 \text{ [døgn]}$$

): Etter ca. 15 år

Oppgave IV

Den logistiske differensialligningen $y' = ky(B - y)$ har som kjent løsningen $y = \frac{B}{1 + Ce^{-kBy}}$, en løsning vi kan finne ved å separere ligningen og bruke delbrøksoppspaltning.

Vi kan unngå delbrøksoppspaltning ved å gjøre et variabelskifte fra y til $u = \frac{1}{y} = y^{-1}$.

a) Vis at $u' = -u^2y'$. (Bruk kjerneregelen med y som kjerne.)

b) Vis at dette variabelskiftet gir differensialligningen $u' = k(1 - Bu)$.

c) Løs denne ligningen som separabel differensialligning og vis at løsningen blir: $u = \frac{1 - Ce^{-kbt}}{B}$.

d) Vis til slutt at dette gir løsningen $y = \frac{B}{1 + Ce^{-kbt}}$ når vi skifter tilbake fra u til y .

a) $u = \frac{1}{y} = y^{-1}$

Derivert med y som kjerne med hensyn på t :

$$u' = -y^{-1-1}y' = -y^{-2}y' = -\frac{1}{y^2}y' = -u^2y' \quad QED$$

b) Vi bytter ut y' med $y' = -\frac{u'}{u^2}$ fra a), og y med $y = \frac{1}{u}$, og får:

$$-\frac{u'}{u^2} = k\frac{1}{u}\left(B - \frac{1}{u}\right) \Leftrightarrow u' = -ku\left(B - \frac{1}{u}\right) \Leftrightarrow u' = -k(Bu - 1) \Leftrightarrow u' = k(1 - Bu) \quad QED$$

c) Separabel:

$u \neq \frac{1}{B}$ (Eller: $y \neq B$):

$$\begin{aligned} \frac{u'}{1-Bu} = k &\Leftrightarrow \int \frac{1}{1-Bu} du = \int k dt \Leftrightarrow \frac{1}{-B} \ln|1-Bu| = kt + C_1 \Leftrightarrow \\ \ln|1-Bu| = -kbt + C_2 &\Leftrightarrow |1-Bu| = e^{-kbt+C_2} \Leftrightarrow 1-Bu = C_3 e^{-kbt} \Leftrightarrow \\ u = \frac{1-C_3 e^{-kbt}}{B} &\quad QED \quad (u = \frac{1}{B} \text{ inkludert i tilfellet } C_3 = 0.) \end{aligned}$$

d) $u = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{1-C_3 e^{-kbt}}{B}} = \frac{B}{1-C_3 e^{-kbt}} = \frac{B}{1+Ce^{-kbt}} \quad QED$