

$$IF = e^{\int 1 dx} = e^x$$

$$y'e^x + ye^x = xe^x \Leftrightarrow (ye^x)' = xe^x \Leftrightarrow ye^x = \int xe^x dx$$

$$\text{Delvis integrasjon: } \int xe^x dx = e^x x - \int e^x 1 dx = e^x x - e^x + C$$

$$\text{Ligning: } ye^x = e^x x - e^x + C \Leftrightarrow y = x - 1 + Ce^{-x}$$

Oppgave 2

Løs differensialligningene:

a) $xy' + y = \cos x$, med initialbetingelsen: $y(\frac{\pi}{2}) = 2$

b) $yy'x^2 = 1$, med initialbetingelsen: $y(1) = \sqrt{2}$

a) Kan skrive som $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cos x}{x}$ og bruke integrerende faktor:

$$IF = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

Multiplikasjon gir da:

$$xy' + y = \cos x \quad \text{og vi er tilbake der vi startet!}$$

Så, egentlig burde vi sett at venstre side er klar for produktsetningen direkte: (Sparer en del tid på å se slike ting!)

$$xy' + y = y'x + y1 = (yx)'$$

Uansett, vi får: $(yx)' = \cos x \Leftrightarrow yx = \sin x + C \Leftrightarrow$

$$y = \frac{\sin x + C}{x} \quad (\text{Generell løsning.})$$

Initialbetingelse: $y(\frac{\pi}{2}) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{1+C}{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow C = \pi - 1$

$$y = \frac{\sin x + \pi - 1}{x} \quad (\text{Spesiell løsning.})$$

b) Ulineær, så vi separerer:

$$yy' = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \int yy' dx = \int x^{-2} dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{y^2}{2} = -x^{-1} + C_1 \Leftrightarrow y^2 = C - \frac{2}{x} \quad (\text{Generell løsning på ligningsform}) \Leftrightarrow$$

$$y = \pm \sqrt{C - \frac{2}{x}} \quad (\text{Generell løsning på funksjonsform})$$

Initialbetingelse: $y(1) = \sqrt{2}$

$$\sqrt{2} = \pm \sqrt{C - \frac{2}{1}} \Leftrightarrow C = 4 \quad (\text{Negativ løsning umulig!})$$

$$y = \sqrt{4 - \frac{2}{x}} \quad (\text{Spesiell løsning.})$$

OBS: Legg merke til at $y = -\sqrt{4 - \frac{2}{x}}$ må forkastes med denne initialbetingelsen! ($-\sqrt{C - \frac{2}{x}}$ kan aldri bli $\sqrt{2}$!)

Oppgave 3

a) Hvilke av differensialligningene i oppgave 1 og 2 er av første orden?

b) Hvilke av differensialligningene i oppgave 1 og 2 er ulineære. (Grad høyere enn 1.)

a) Alle er av første orden. (Første deriverte av y .)

b) Oppgave 1b) ($yy' - x = 0$) og

Oppgave 2 b) ($yy'x^2 = 1$) er ulineære da de inneholder produkt av y -er!
(y^2 , $(y')^2$ eller yy' .)

Oppgave 4

a) Vis at $(\sin(x+y))' = \cos(x+y)(1+y')$.

b) Bruk dette til å løse differensialligningen $y' = \frac{1-\cos(x+y)}{\cos(x+y)}$.

(Løsningen er ikke en funksjon, så behold løsningen på ligningsform.)

a) Kjernerregel gir: $\sin(x+y) = \sin(u)$, $u = x+y$
 $(\sin(x+y))' = \cos(u)(1+y') = \cos(x+y)(1+y')$ *QED*

b) $y' = \frac{1-\cos(x+y)}{\cos(x+y)} \Leftrightarrow y' = \frac{1}{\cos(x+y)} - 1 \Leftrightarrow y' + 1 = \frac{1}{\cos(x+y)} \Leftrightarrow$
 $\cos(x+y)(1+y') = 1$

Resultatet i a) gir:

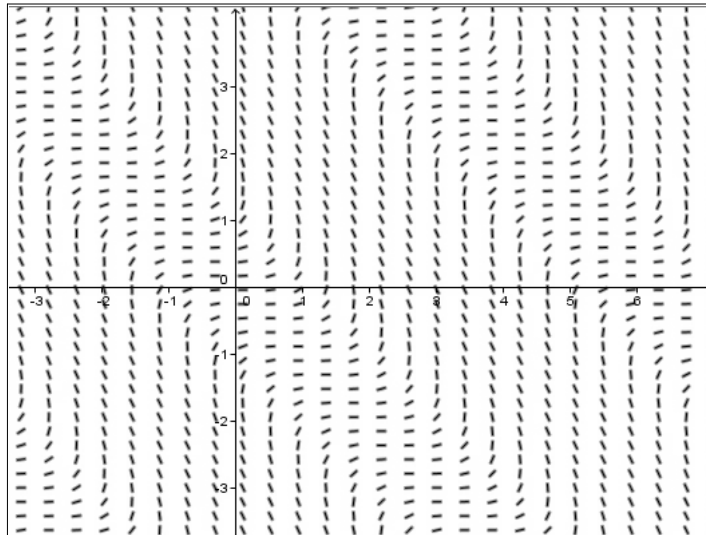
$(\sin(x+y))' = 1 \Leftrightarrow \sin(x+y) = x + C$ (Ligningsform.)

Kommentarer:

Vanskelig å løse denne med hensyn på y og få med alle muligheter, da $\sin(x)$ bare har definert invers funksjon $\sin^{-1}(x)$ for x begrenset til intervallet $[-1, 1]$.

Kan finne retningsdiagram i GeoGebra med:

Retningsdiagram $[(1-\cos(x+y))/\cos(x+y)]$



Litt verre å grafe, men kan være lurt å kjenne til et triks (:-) som går ut på å bruke parameterfremstilling:

For å få både x og y ut av sinusfunksjonen, innfører vi parameteren

$$t = x + y \quad \Rightarrow \quad x = t - y \quad I$$

og får da:

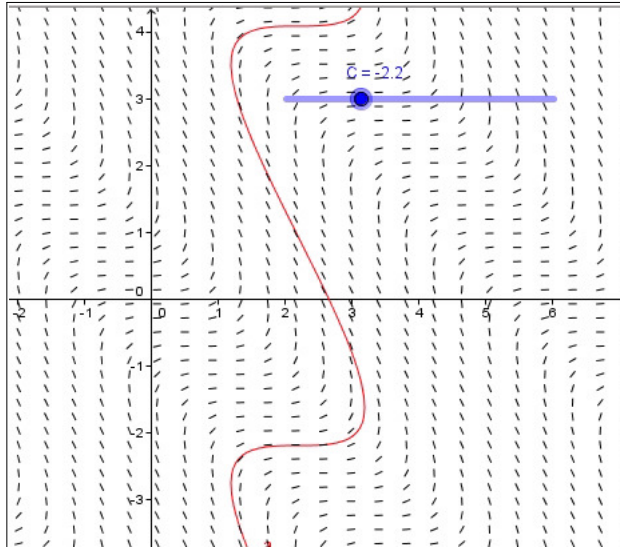
$$\sin t = t - y + C \quad \Rightarrow \quad y = C + t - \sin t \quad II$$

Dette gir igjen parameterfremstillingen:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t - y \\ y = C + t - \sin t \end{array} \right\} \text{ som igjen gir: } \left\{ \begin{array}{l} x = t - (C + t - \sin t) \\ y = C + t - \sin t \end{array} \right\}$$

Kommandoen:

Kurve[t-(C+t-sin(t)), C+t-sin(t), t, -10, 10] gir da:



Oppgave 5

Vektløfteren Bjørn Råsterk tok sikte på å få medalje i et VM ved hjelp av kosttilskuddet Super Testo Steron, som ikke overraskende stod på dopinglisten. Anbefalt dose i døgnet var 1 gram. I Bruksanvisningen Råsterk fikk av en østeuropeisk vektløfter, sto det at for hvert gram inntatt Super Testo Steron blir det lagret 2 mg av et sporstoff S i blodet.

Uheldigvis for Råsterk og likesinnede kunne sporstoffet S oppdages ved dopingkontroller.

Kroppen bryter ned 10% av dette sporstoffet i løpet av et døgn.

Råsterk brukte anbefalt dose de siste 30 dagene før VM.

a) Vis at dette gir en modell beskrevet av differensialligningen

$$y' + 0.1y = 2 \text{ [mg/døgn]}, \quad t \in [0, \rightarrow) \text{ [døgn]}$$

b) Løs differensialligningen.

c) Finn ut om Råsterk ble tatt i dopingkontrollen, hvis dopingkontrollen ga positivt utslag på alle med mer enn 15 mg sporstoff i blodet.

a) Skjematisk:

$$\begin{array}{rcl} \text{Endring} & = & \text{Inn} \quad - \quad \text{Ut} \\ \text{Endringshastighet sporstoff i blod} & = & \text{Daglig dose} \quad - \quad \text{Daglig nedbrytning} \\ y' \text{ [mg/d]} & = & 2 \text{ [mg/d]} \quad - \quad 0.1 \text{ [1/d]} y \text{ [mg]} \end{array}$$

Så vi har differensialligningen:

$$y' + 0.1y = 2, \text{ der } y \text{ er antall mg sporstoff i blodet.}$$

(Forutsetningen for modellen er at vi regner som om inntaket skjer helt kontinuerlig gjennom døgnet. I virkeligheten ville det skje med en pille en gang i døgnet, så slik sett vil en modell med følge/rekke passe bedre, på den annen side er daglig nedbrytning kontinuerlig gjennom døgnet, så både en følge/rekke eller differensialligning er mulige måter å lage modeller på.)

b) Lineær og kan løses både med integrerende faktor og som separabel differensialligning:

$y \neq 20$ gir:

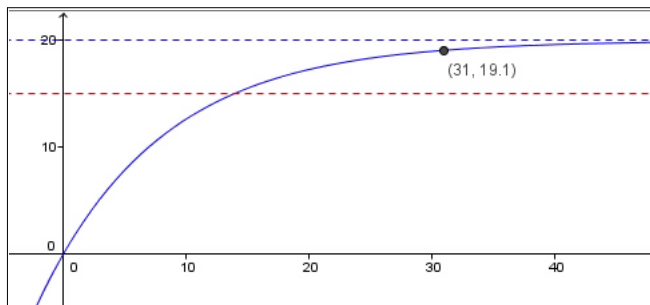
$$\begin{aligned} \frac{y'}{2-0.1y} = 1 &\Leftrightarrow \int \frac{y'}{2-0.1y} dt = \int 1 dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{2-0.1y} dy = \int 1 dt \Leftrightarrow \\ \frac{\ln|2-0.1y|}{-0.1} = t + C_1 &\Leftrightarrow \ln|2-0.1y| = -0.1t + C_2 \Leftrightarrow \\ |2-0.1y| = e^{-0.1t+C_2} &\Leftrightarrow |2-0.1y| = e^{-0.1t} e^{C_2} \Leftrightarrow \\ |2-0.1y| = C_3 e^{-0.1t} &\Leftrightarrow 2-0.1y = C_4 e^{-0.1t} \Leftrightarrow \\ 0.1y = 2 - C_4 e^{-0.1t} &\Leftrightarrow y = 20 - C e^{-0.1t} \quad (\text{Generell løsning.}) \\ (y = 20 \text{ er dekket av } C = 0.) & \end{aligned}$$

Initialbetingelse: $y(0) = 0$ [mg]

(Naturlig å regne med at Råsterk ikke er dopet i utgangspunktet.)

$$0 = 20 - C e^0 \Leftrightarrow C = 20$$

$$y = 20 - 20e^{-0.1t} \quad (\text{Spesiell løsning.})$$



c)

Sporstoff i blodet dag 31: $y(31) \approx 19$ [mg]

): Råsterk ble tatt i dopingkontrollen da $y(31) > 15$ (grenseverdien)

Oppgave 6

Det ble satt ut kaniner på en øde øy. Antall kaniner var etter t måneder gitt av den logistiske modellen $K(t) = \frac{B}{1+ae^{-kt}}$ [kaniner], $D_K = [0, \rightarrow)$ [mnd.].

a) Vis at $K'(t) = akB^2 \frac{e^{-kt}}{(ae^{-kt}+1)^2}$

b) Vis ved innsetting at $K(t)$ er løsning av den logistiske differensialligningen

$$K' = kK(B - K)$$

Utviklingen av bestanden går frem av tabellen:

t :[mnd]	6	12	18
$K(t)$:[kaniner]	330	460	490

- c) Bruk opplysningene til å finne B, a og k .
- d) Hvor mange kaniner ble satt ut i utgangspunktet?
- e) Hvor mange kaniner gir denne modellen i det lange løp?
- f) Hva er maksimal veksthastighet?

a) Bruker kjerneregul:

$$K(t) = B(1 + ae^{-kbt})^{-1} = Bu^{-1}, \quad u = 1 + ae^{-kbt}$$

$$K'(t) = -Bu^{-2} \cdot (0 + ae^{-kbt})(-kB) = akB^2(1 + ae^{-kbt})^{-2}e^{-kbt} = akB^2 \frac{e^{-kbt}}{(1+ae^{-kbt})^2} \quad QED$$

b) $VS = K'(t) = akB^2 \frac{e^{-kbt}}{(1+ae^{-kbt})^2}$ (Fra a.)

$$HS = kK(t)(B - K(t)) = k \frac{B}{1+ae^{-kbt}} \left(B - \frac{B}{1+ae^{-kbt}} \right) = k \frac{B^2}{1+ae^{-kbt}} \left(1 - \frac{1}{1+ae^{-kbt}} \right) = k \frac{B^2}{1+ae^{-kbt}} \frac{1+ae^{-kbt}-1}{1+ae^{-kbt}} = k \frac{B^2}{1+ae^{-kbt}} \frac{ae^{-kbt}}{1+ae^{-kbt}} = akB^2 \frac{e^{-kbt}}{(1+ae^{-kbt})^2} \quad QED$$

Resten av oppgaven dreier seg mer om kapittel 4, men jeg tok den med da den gir oss litt mer informasjon om den logistiske funksjonen.

c) Regresjon med TI lommeregner:

Listene: **L1={6,12,18}** og **L2={330,460,490}**

og kommandoen: **STAT,CALC, B:Logistic L1,L2**

gir oss modellen:

$$K(t) = \frac{496}{1+3.24e^{-0.310t}}$$

I GeoGebra: **RegLogist[{(6,330), (12,460), (18,490)}]**

gir samme resultat!

d) Kaniner i utgangspunktet, $t = 0$:

$$K(0) = \frac{496}{1+3.24e^0} \approx 117$$

e) Kaniner i det lange løp, $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{496}{1+3.24e^{-0.310t}} = \frac{496}{1+0} = 496$$

(Bærekraften $B = 496$.)

f) Maksimal veksthastighet har vi i vendepunktet, og vi vet at det er i symmetripunktet der $K(t) = \frac{B}{2}$.

Trikset her er å bruke den opprinnelige differensialligningen:

Maks. veksthastighet:

$$K' = k \frac{B}{2} \left(B - \frac{B}{2} \right) = k \frac{B}{2} \frac{B}{2} = \frac{kB^2}{4} = \frac{0.310 \cdot 496^2}{4} \approx 38 \text{ [kaniner/mnd]}$$

Se også en annen fil-lenke der jeg som en illustrasjon viser hvordan alle oppgavene kunne vært gjort med CAS!
