

# Foreløpige svar og løsningskisser eksamen R2 V 2017

## Del I:

### Oppgave 1

a)  $f'(x) = 3 \cos x - \sin x$

b) Produktregel (og kjerneregul):

$$g'(x) = 2x \cos 2x + x^2(-\sin(2x) \cdot 2) = 2x(\cos 2x - x \sin 2x)$$

c) Brøkregel:  $h'(x) = \frac{-2 \sin x(1+\sin x) - 2 \cos x \cdot \cos x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-2 \sin x - 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} =$   
 $\frac{-2 \sin x - 2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{-2 \sin x - 2}{(1+\sin x)^2} = \frac{-2(\sin x + 1)}{(1+\sin x)^2} = -\frac{2}{1+\sin x}$

### Oppgave 2

a)  $\int (x^2 - \frac{2}{x}) dx = \frac{x^3}{3} - 2 \ln|x| + C$

b) Variabelskifte:  $u = 2x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x$

$$\int x \cos(2x^2) dx = \int x \cos(u) \frac{du}{4x} = \frac{1}{4} \int \cos u du = \frac{1}{4} \sin u + C = \frac{1}{4} \sin(2x^2) + C$$

### Oppgave 3

Tegn figur:

Likevektslinje:  $y = 1$

Amplitude:  $A = 2$

Periode:  $T = \pi$  (2 hele svingninger i definisjonsområdet)

Ingen faseforskyvning.

Ser da direkte fra figur:

a) Toppunkter:  $(\frac{\pi}{4}, 1), (\frac{5\pi}{4}, 1)$

Bunnpunkter:  $(\frac{3\pi}{4}, -3), (\frac{7\pi}{4}, -3)$

b) Nullpunkter:  $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$

c) Se tidligere, jeg ville gjort dette først, men oppgaven tenker vel at man skal regne på a) og b), noe jeg synes er litt tungvindt her...

### Oppgave 4

a) Separabel:  $\int \frac{1}{y} dy = \int x dx \Rightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C_1$

Generell løsning:  $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$

b) Initialbetingelse gir:  $5 = Ce^{\frac{2^2}{2}} \Leftrightarrow 5 = Ce^2 \Leftrightarrow C = \frac{5}{e^2}$

Spesiell løsning:  $y = \frac{5}{e^2} e^{\frac{x^2}{2}}$  (eller  $y = 5e^{\frac{x^2-4}{2}}$ )

### Oppgave 5

$l: f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

$$\text{Volum: } V = \pi \int_0^4 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} + 3x + 9\right) dx = \pi \left[ \frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x \right]_0^4 = \pi \left( \frac{16}{3} + 24 + 36 - 0 \right) = \frac{196}{3}\pi$$

(Kontroll for dem som kan formelen:  $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ )

### Oppgave 6

$\vec{SP} = [3, -4, 0]$  gir radius:  $R = |\vec{SP}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

a) Ligning:  $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 5^2$

b) Normalvektor til plan:  $\vec{n} = \vec{SP} = [3, -4, 0]$

Ligning, da  $P$  ligger i planet:  $[x-4, y+1, z-5] \cdot [3, -4, 0] = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y - 16 = 0$  *QED*

c) Avstand fra  $Q$  til plan blir radius:

$$r = \left| \frac{3x_Q - 4y_Q - 16}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \left| \frac{3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 - 16}{5} \right| = \left| \frac{-10}{5} \right| = 2$$

):  $(x-2)^2 + y^2 + (z-7)^2 = 2^2$

### Oppgave 7

a) Kvotient:  $k = \ln x$ ,  $x > 0$

Krav:  $-1 < \ln x < 1$ :

$$-1 < \ln x \Leftrightarrow \frac{1}{e} < x$$

$$\ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$$

Konvergensområde:  $\langle \frac{1}{e}, e \rangle$

b)  $S(x) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-\ln x}$

c)  $\frac{1}{1-\ln x} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{1-\ln x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{1-3(1-\ln x)}{1-\ln x} = 0 \Leftrightarrow \frac{3\ln x - 2}{1-\ln x} = 0$

$\ln x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = e^{\frac{2}{3}}$  (Er i konvergensområdet.)

$$d) S(x) = r \Leftrightarrow \frac{1}{1-\ln x} = r \Leftrightarrow \frac{1-r(1-\ln x)}{1-\ln x} = 0 \Leftrightarrow \frac{r \ln x - (r-1)}{1-\ln x} = 0$$

$$r \ln x - (r-1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{r-1}{r}$$

$$\text{Krav: } -1 < \frac{r-1}{r} < 1$$

$$\text{Løser ulikhetene med tallinjer og får: } r > \frac{1}{2}$$

## Oppgave 8

$$\text{Formel for sum: } S(n) = \frac{n!-1}{n!}$$

$$\text{Formel for } n\text{'te ledd: } a(n) = \frac{n-1}{n!}$$

I Startverdi:  $n = 2$ :

$$VS = \text{sum} = a(2) = \frac{2-1}{2!} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

$$HS = \text{formel} = S(2) = \frac{2!-1}{2!} = \frac{1}{2}$$

OK

II Induksjonstrinn:  $n \rightarrow n + 1$ :

$$\text{Antar at formel er riktig for } n = k: S(k) = \frac{k!-1}{k!}$$

$$\text{Må vise at } S(k+1) = \frac{(k+1)!-1}{(k+1)!}$$

$$S(k+1) = S(k) + a(k+1) = \frac{k!-1}{k!} + \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{(k!-1)(k+1)}{k!(k+1)} + \frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k!-1)(k+1)}{(k+1)!} + \frac{k}{(k+1)!} = \frac{k!(k+1) - (k+1) + k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)!-1}{(k+1)!}$$

OK

## Del II:

### Oppgave 1

a) Graf i GGB, se c)

b) Bruk CAS:

$$f'(x)=0 \quad \text{Løs} \quad \rightarrow \quad \left\{-\frac{5}{2}, -1\right\}$$

$$A := (-5/2, f(-5/2))$$

$$B := (-1, f(-1))$$

$$g(x) := \text{Linje}[A, B] \quad \rightarrow \quad g(x) = -\frac{5}{8}x - \frac{5}{8}$$

$$\text{Skjæring}[f, g] \quad \rightarrow \quad \left\{(-1, 0), \left(-\frac{5}{2}, \frac{15}{16}\right), \left(\frac{3\sqrt{5}-7}{4}, \dots\right), \left(\frac{-3\sqrt{5}-7}{4}, \dots\right)\right\}$$

som er  $B, \quad A, \quad C, \quad D$

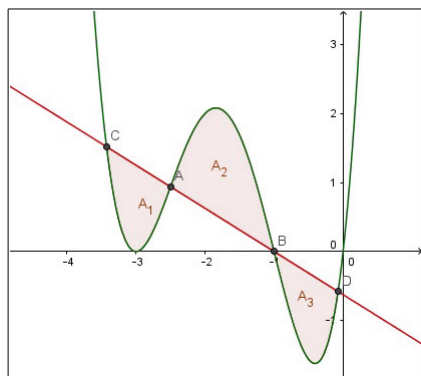
$$C := \text{Element}[\$5, 4]$$

$$D := \text{Element}[\$5, 3]$$

$a:=x(C)$   
 $b:=x(D)$   
 $I:=\text{Integral}[f-g,x,a,b] \rightarrow 0$  (Integralet blir 0!)

Dette betyr at arealene oppfyller ligningen:  $A_1 + A_3 = A_2$

(Det kan også vises at  $A_1 = A_3$ )



## Oppgave 2

a)

I Geogebra CAS:

$A:=(3,2,t)$

$B:=(4,-3,3)$

$C:=(8,3,5)$

$ab:=\text{Vektor}[A,B]$

$ac:=\text{Vektor}[A,C]$

$f(t):=|ab \times ac|/2$

GeoGebra viser:  $f(t) = \sqrt{13} \sqrt{t^2 - 8t + 30}$   
 Som vi kan skrive om til:  $f(t) = \sqrt{13(t^2 - 8t + 30)}$  *QED*

b)

Vi fortsetter:

$f'(t)=0$

Løs gir:  $\{t=4\}$

$f(4)$

gir:  $\sqrt{182} \approx 13.5$  (graf viser at dette er minimum)

): Minste areal er 13.5

## Oppgave 3

I GeoGebra CAS:

$f(x):=2 \sin(\pi x + \pi/2) + d$

$V:=\pi \text{ integral}[f^2, 1, 2]$

$V=6\pi$

gir:  $\pi(d^2 + 2)$

Løs gir:  $\{d = -2, d = 2\}$

): Mulige verdier er altså  $d = -2$  eller  $d = 2$

## Oppgave 4

a) Vi har  $S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{a}{1-k}$  og  $T = \frac{a}{1-2k}$ , så vi gjør i CAS:

$$S:=a/(1-k)$$

$$T:=a/(1-2k)$$

$$S=6$$

$$T=12$$

Løs[{\$3,\$4}] (eller merke linje 3 og 4 og trykke Løs-knapp) gir:  
 $\{a = 4, k = \frac{1}{3}\}$

):  $a = 4 \wedge k = \frac{1}{3}$  (Ok, da både  $k$  og  $2k$  ligger i konvergensområdet.)

b) Obs: Ikke nok å skrive  $S = -2 T$  og trykke løs, gir bare den trivielle løsningen  $a = 0$  !

Løs[S=-2 T,k] gir:  $\{k = \frac{3}{4}\}$

Men,  $2k = \frac{3}{2}$  er utenfor konvergensområdet for  $T$ , så det er ikke mulig å finne en  $k$  slik at  $S = -2T$ .

## Oppgave 5

$$\begin{array}{rclcl} \text{a)} & \text{Endring [mg/time]} & = & \text{Tilført} & - & \text{Utskilt} \\ & y' & = & 3 & - & 0.3y \end{array}$$

At pasienten ikke har medisin i kroppen ved oppstart gir initialbetingelsen  $y(0) = 0$

b)

GeoGebra CAS:

f(x):=LøsODE[y'=3-0.3 y,y,t,(0,0)] gir:  $f(x) := -10e^{-\frac{3}{10}t} + 10$

): Spesiell løsning  $y = 10 - 10e^{-0.3t}$

$$\text{c)} \lim_{t \rightarrow \infty} y = 10 - 10 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{0.3t}} = 10 - 10 \cdot 0 = 10$$

): Medisinnmengden i pasienten vil stabilisere seg på 10 mg.

d)  $g(t):=LøsODE[y'=3-0.3 y,y,t,(0,y_0)]$  gir:  $g(t) := y_0 e^{-\frac{3}{10}t} - 10e^{-\frac{3}{10}t} + 10$

$g(6)=9.17$  og Numerisk Løs-knappen gir:  $\{y_0 = 4.98\}$

): Den andre pasienten har 5.0 mg medisin i kroppen ved behandlingsstart.