R2 - Funksjoner, integrasjon og trigonometri

Del I - Uten hjelpemidler

Oppgave 1

Regn ut integralene:

a) $\int x \cos x \, dx$ b) $\int \frac{x}{x^2-3x+2} dx$ c) $\int e^x \cos(e^x) \, dx$

Oppgave 2

Løs ligningene når $x \in [0, 2\pi\rangle$:

a) $\tan(2x+1) = \sqrt{3}$ b) $\tan(x)\sin(x) = \tan(x)\cos(x)$

c) $\tan^2(x) - \sqrt{3}\tan(x) = \sqrt{3} - \tan(x)$

(Hint: På den siste kan du få bruk for: $4 + 2\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})^2$)

Oppgave 3

En funksjon f er gitt ved: $f((x) = \cos(2x) - 1, \quad D_f = \langle 0, 12\rangle$

a) Hva er perioden til f ?

b) Bestem null-, topp-, bunn- og vendepunkter til f.

c) Finn vendetangenten til vendepunktet nærmest y-aksen.

Oppgave 4

Gitt funksjonen $f(x) = \sin(x) - \cos(x), \quad D_f = [0, 2\pi\rangle$

a) Vis at $f(x)$ kan skrives $\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$.

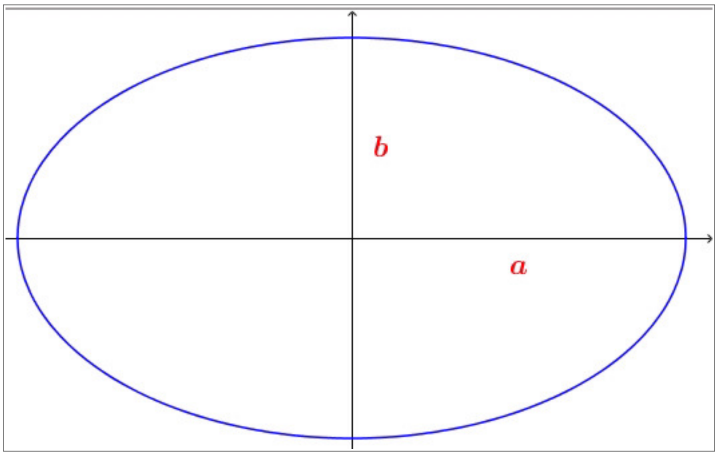
b) Løs ligningen $\sin(x) - \cos(x) = 1$.

c) Finn arealet avgrenset av $f(x)$ og funksjonen $g(x) = 1$.

Del II - Med hjelpemidler

Oppgave 5

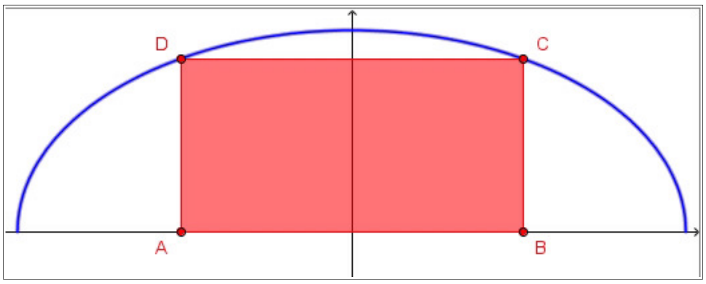
En ellipse har ligningen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ og ser slik ut:



a og b kalles halvakser og vi legger merke til at grafen til ellipsen skjærer koordinataksene i $(a,0)$, $(0,b)$, $(-a,0)$ og $(0,-b)$.

a) Forklar at den delen av ellipsen som ligger over x-aksen er grafen til funksjonen
$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

b) Vi definerer et rektangel $ABCD$ der punktene $A(-c,0)$ og $B(c,0)$ ligger på x-aksen og punktene C og D ligger på $f(x)$, slik som vist i figuren:



Bestem hva c må være for at arealet av rektanglet $ABCD$ skal bli størst mulig.

c) Dreier vi grafen til $f(x)$ 360° om x-aksen, får vi en ellipsoide.
Vis at formelen for volumet av ellipsoiden er $V = \frac{4\pi ab^2}{3}$.

Oppgave 6

En rett linje l går gjennom $A(0,r)$ og $B(h,R)$.

a) Vis at linjen l har funksjonsuttrykket $l(x) = \frac{R-r}{h}x + r$.

b) Linjestykket AB roteres 360° om x-aksen og vi får da et omdreiningslegeme som er en såkalt avkortet kjegle.
Finn et uttrykk for volumet av omdreiningslegemet uttrykt ved r, R og h.

Oppgave 7

En fallskjermhopper som hoppet ut fra et fly hadde konstant fart 50 m/s da han utløste fallskjermen. Farten utviklet seg videre slik det er vist i denne tabellen:

t [s]:	0	1	2	3	4
v [m/s]:	50	21	14	11	10

a) Bruk kurvetilpasning i GeoGebra til å vise at funksjonsuttrykket
$v(t) = 7.9\frac{1+0.73e^{-0.48t}}{1-0.73e^{-0.48t\pm}}$, basert på den teoretiske modellen: $v(t) = a\frac{1+b\,e^{-kt}}{1-b\,e^{-kt}}$,
er en god modell for utviklingen av farten etter at fallskjermen ble utløst.

b) Regn ut $v'(0)$ og forklar hva denne verdien representerer .

c) Etter en stund stabiliserte farten seg. Hva var farten da?

d) Fallskjermhopperen nådde bakken etter 2 minutter.
Hvor høyt over bakken var han da fallskjermen ble utløst?
