

# R2 - Funksjoner, integrasjon og trigonometri

## Løsningsskisser

### Del I - Uten hjelpemidler

#### Oppgave 1

Regn ut integralene:

$$a) \int x \cos x \, dx \quad b) \int \frac{x}{x^2-3x+2} dx \quad c) \int e^x \cos(e^x) dx$$

$$a) \text{ Delvis integrasjon: } \int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$b) \text{ Delbrøkkoppspalting: } \int \frac{x}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{x}{(x-1)(x-2)} dx = \int \left( \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx = 2 \ln|x-2| - \ln|x-1| + C_1 = \ln \frac{(x-2)^2}{|x-1|} + \ln C = \ln \left( C \frac{(x-2)^2}{|x-1|} \right)$$

$$c) \text{ Variabelskifte: } u = e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} \text{ gir:}$$

$$\int e^x \cos(e^x) dx = \int e^x \cos(u) \frac{du}{e^x} = \int \cos(u) du = \sin(u) + C = \sin(e^x) + C$$

#### Oppgave 2

Løs ligningene når  $x \in [0, 2\pi)$ :

$$a) \tan(2x + 1) = \sqrt{3} \quad b) \tan(x) \sin(x) = \tan(x) \cos(x)$$

$$c) \tan^2(x) - \sqrt{3} \tan(x) = \sqrt{3} - \tan(x)$$

$$(\text{Hint: På den siste kan du få bruk for: } 4 + 2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2)$$

$$a) 2x + 1 = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi-3}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi-3}{6} + k\frac{\pi}{2}$$

$$L = \left\{ \frac{\pi-3}{6}, \frac{4\pi-3}{6}, \frac{7\pi-3}{6}, \frac{10\pi-3}{6} \right\}$$

$$b) \text{ Betingelse: } \cos x \neq 0$$

$$\text{Enten: } \tan(x)(\sin(x) - \cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \tan(x) = 0 \vee \tan(x) = 1$$

$$\text{Eller: } \tan(x) \sin(x) = \sin(x) \Leftrightarrow \sin(x)(\tan(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin(x) = 0 \vee \tan(x) = 1$$

$$\text{Eller: } \tan(x) \tan(x) = \tan(x) \quad (\text{dividerer med } \cos x, \text{ som ikke er null})$$

$$\tan(x)(\tan(x) - 1)$$

$$\tan(x) = 0 \vee \tan(x) = 1$$

$$L = \left\{ 0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4} \right\}$$

$$c) \text{ Enklest: } \tan(x)(\tan(x) - \sqrt{3}) = -(\tan(x) - \sqrt{3}) \Leftrightarrow$$

$$\tan(x)(\tan(x) - \sqrt{3}) + (\tan(x) - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\tan(x) + 1)(\tan(x) - \sqrt{3}) = 0$$

$$\tan(x) = -1 \vee \tan(x) = \sqrt{3}$$

$$L = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

Uten direkte faktorisering, som vist over, må vi trekke sammen og bruke abc-formel og hintet  $4 + 2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2$ :

$$\begin{aligned} u^2 + (1 - \sqrt{3})u - \sqrt{3} &= 0, & u &= \tan(x) \\ u &= \frac{-(1-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(1-\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3}}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{1 - 2\sqrt{3} + 3 + 4\sqrt{3}}}{2} = \\ &= \frac{-1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{3} \pm (1 + \sqrt{3})}{2} \\ \text{): } u &= \sqrt{3} \vee u = -1 \Leftrightarrow \tan(x) = \sqrt{3} \vee \tan(x) = -1 \end{aligned}$$

### Oppgave 3

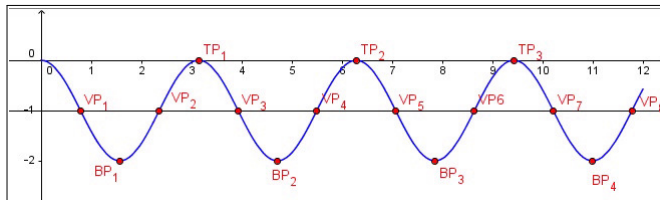
En funksjon  $f$  er gitt ved:  $f(x) = \cos(2x) - 1$ ,  $D_f = \langle 0, 12 \rangle$

- Hva er perioden til  $f$ ?
- Bestem null-, topp-, bunn- og vendepunkter til  $f$ .
- Finn vendetangenten til vendepunktet nærmest  $y$ -aksen.

a) Periode gitt av:  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

b)  $f(x)$  svinger dobbelst så fort som  $\cos(x)$  og er flyttet en enhet nedover, med likevektslinje:  $y = -1$

Graf:



En graf-skisse, som over, viser alle interessante punkter, dette er en sinus-svingning og det er derfor ikke nødvendig å derivere for å finne ekstremalpunkter eller vendepunkter!

Vi *vet* at alle ekstremalpunktene er der  $\cos(2x) = \pm 1$  og vi *vet* alle vendepunktene ligger på likevektslinjen med innbyrdes avstand lik en halv periode  $\frac{\pi}{2}$ !

Nullpunkter:  $\cos(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 + k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi$

):  $x = \pi \vee x = 2\pi \vee x = 3\pi$

Toppunkter:  $2x = 0 + k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi$  (Der  $\cos(2x) = 1$ )

):  $(\pi, 0)$ ,  $(2\pi, 0)$  og  $(3\pi, 0)$  (Punkter! Se side 142!)

Bunnpunkter:  $2x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  (Der  $\cos(2x) = -1$ )

$$): (\frac{\pi}{2}, -2), (\frac{3\pi}{2}, -2), (\frac{5\pi}{2}, -2) \text{ og } (\frac{7\pi}{2}, -2)$$

$$\text{Vendepunkter: } 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (\text{Der } \cos(2x) = 0)$$

$$): (\frac{\pi}{4}, -1), (\frac{3\pi}{4}, -1), (\frac{5\pi}{4}, -1), (\frac{7\pi}{4}, -1), \\ (\frac{9\pi}{4}, -1), (\frac{11\pi}{4}, -1), (\frac{13\pi}{4}, -1) \text{ og } (\frac{15\pi}{4}, -1)$$

$$\text{c) } f'(x) = -\sin(2x)2 = -2\sin(2x) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = -2\sin(\frac{\pi}{2}) = -2$$

$$\text{Ett-punkts-formelen: } y - (-1) = -2(x - \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow$$

$$\text{Vendetangent: } y = -2x + \frac{\pi-2}{2}$$

### Oppgave 4

$$\text{Gitt funksjonen } f(x) = \sin(x) - \cos(x), \quad D_f = [0, 2\pi)$$

$$\text{a) Vis at } f(x) \text{ kan skrives } \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}).$$

$$\text{b) Løs ligningen } \sin(x) - \cos(x) = 1.$$

$$\text{c) Finn arealet avgrenset av } f(x) \text{ og funksjonen } g(x) = 1.$$

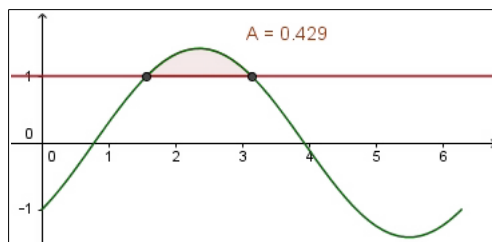
$$\text{a) Formel: } A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}, \quad \tan \varphi = \frac{b}{a} = -1, \varphi \text{ i 4de kvadrant} \\ \text{gir: } f(x) = \sqrt{2} \sin(x + \frac{7\pi}{4}) \text{ eller } f(x) = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) \quad \text{QED}$$

$$\text{b) } \sin(x) - \cos(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \pi + k2\pi$$

$$L = \{\frac{\pi}{2}, \pi\}$$

$$\text{c) Areal: } A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (f(x) - g(x)) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) - 1) dx = \\ (\text{Eller: } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x - \cos x - 1) dx)$$

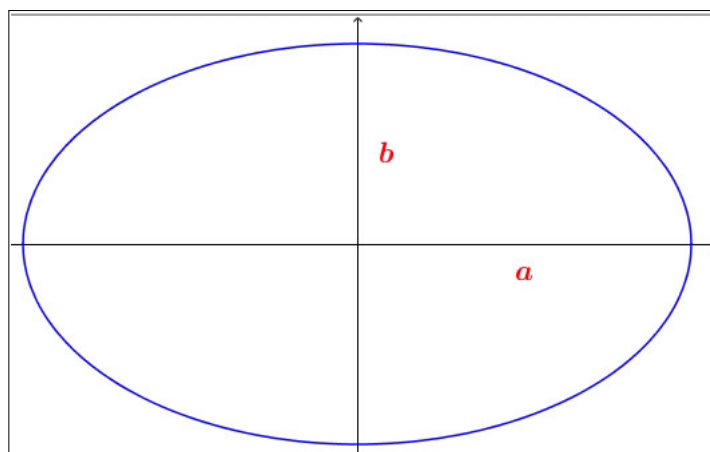
$$\frac{\pi}{2} [-\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) - x] = \\ -\sqrt{2} \cos(\frac{3\pi}{4}) - \pi - (-\sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{2}) = \\ -\sqrt{2} (-\frac{1}{\sqrt{2}}) - \pi + \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{4-\pi}{2}$$



## Del II - Med hjelpemidler

### Oppgave 5

En ellipse har ligningen  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  og ser slik ut:

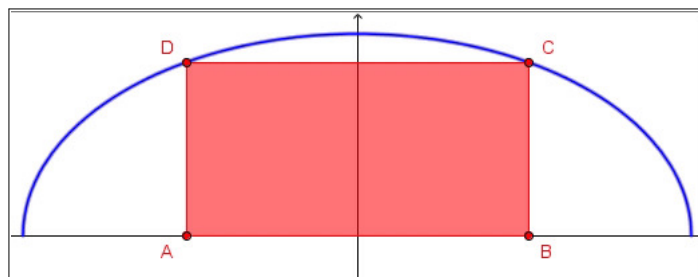


$a$  og  $b$  kalles halvaksler og vi legger merke til at grafen til ellipsen skjærer koordinataksene i  $(a, 0)$ ,  $(0, b)$ ,  $(-a, 0)$  og  $(0, -b)$ .

a) Forklar at den delen av ellipsen som ligger over  $x$ -aksen er grafen til funksjonen

$$f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

b) Vi definerer et rektangel  $ABCD$  der punktene  $A(-c, 0)$  og  $B(c, 0)$  ligger på  $x$ -aksen og punktene  $C$  og  $D$  ligger på  $f(x)$ , slik som vist i figuren:



Bestem hva  $c$  må være for at arealet av rektanlet  $ABCD$  skal bli størst mulig.

c) Dreier vi grafen til  $f(x)$   $360^\circ$  om  $x$ -aksen, får vi en ellipsoide.

Vis at formelen for volumet av ellipsoiden er  $V = \frac{4\pi ab^2}{3}$ .

$$\text{a) } \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{y}{b} = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \Leftrightarrow \frac{y}{b} = \pm \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}} \Leftrightarrow \\ \frac{y}{b} = \pm \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\text{): Øvre del: } f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\text{b) Grunnlinje: } AB = c - (-c) = 2c$$

$$\text{Høyde: } BC = f(c) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$\text{Areal: } A(x) = 2cf(c) = 2 \frac{bc}{a} \sqrt{a^2 - c^2}$$

1	$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ $\rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$
2	$L\ddot{o}s\{1.y\}$ $\rightarrow \left\{ y = -\sqrt{a^2 - x^2} \mid a \mid \frac{ b }{a^2}, y = \sqrt{a^2 - x^2} \mid a \mid \frac{ b }{a^2} \right\}$
3	$A(c) := 2 b c/a \sqrt{a^2 - c^2}$ $\rightarrow A(c) := 2 b c \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$
4	$A'(c) = 0$ $L\ddot{o}s: \left\{ c = -\frac{\sqrt{2}}{2} \mid a \mid, c = \frac{\sqrt{2}}{2} \mid a \mid \right\}$

Størst rektangelareal hvis  $c = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$\text{c) Volum ellipsoide: } V = \pi \int_{-a}^a f^2(x) dx = \pi \int_{-a}^a f^2(x) dx$$

1	$f(x) := b/a \sqrt{a^2 - x^2}$ $\rightarrow f(x) := b \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$
2	$V := \pi \int_{-a}^a f^2(x) dx$ $\rightarrow V := \frac{4}{3} a b^2 \pi$

## Oppgave 6

En rett linje  $l$  går gjennom  $A(0, r)$  og  $B(h, R)$ .

$$\text{a) Vis at linjen } l \text{ har funksjonsuttrykket } l(x) = \frac{R-r}{h}x + r.$$

b) Linjestykket  $AB$  roteres  $360^\circ$  om  $x$ -aksen og vi får da et omdreiningselement som er en såkalt avkortet kjegle.

Finn et uttrykk for volumet av omdreiningselementet uttrykt ved  $r$ ,  $R$  og  $h$ .

$$\text{a) Signingstall: } st = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{R-r}{h-0} = \frac{R-r}{h}$$

$$\text{Da } A = (0, r) \text{ er skjæring med } y\text{-akse, har vi: } l(x) = \frac{R-r}{h}x + r \quad QED$$

b)

1	$l(x) := (R-r)/h \cdot x + r$ $\rightarrow l(x) := x \frac{R-r}{h} + r$
2	$V := \pi \int_0^h l(x)^2 dx$ $\rightarrow V := \pi \left( \frac{1}{3} h r^2 + \frac{1}{3} R^2 h + \frac{1}{3} R h r \right)$

Eller:  $V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2)$

## Oppgave 7

En fallskjermhopper som hoppet ut fra et fly hadde konstant fart 50 m/s da han utløste fallskjermen. Farten utviklet seg videre slik det er vist i denne tabellen:

$t$ [s]:	0	1	2	3	4
$v$ [m/s]:	50	21	14	11	10

a) Bruk kurvetilpasning i GeoGebra til å vise at funksjonsuttrykket

$$v(t) = 7.9 \frac{1+0.73e^{-0.48t}}{1-0.73e^{-0.48t}}, \text{ basert på den teoretiske modellen } v(t) = a \frac{1+b e^{-kt}}{1-b e^{-kt}},$$

er en god modell for utviklingen av farten etter at fallskjermen ble utløst.

b) Regn ut  $v'(0)$  og forklar hva denne verdien representerer .

c) Etter en stund stabiliserte farten seg. Hva var farten da?

d) Fallskjermhopperen nådde bakken etter 2 minutter.

Hvor høyt over bakken var han da fallskjermen ble utløst?

a) Legger inn tabellen i regneark og lager Liste1 med punktene.

Definerer en testfunksjon  $test(x) = a \frac{1+b e^{-kx}}{1-b e^{-kx}}$  med kommandoen:

$$test(x) = a (1 + b \exp(-k x)) / (1 - b \exp(-k x))$$

Justerer gliderne a, b og k til det stemmer nogenlunde med punktene.

Kurvetilpasning med:  $v(x) = \text{Reg}[ \text{Liste1}, test ]$

Gir  $v(t) = 7.9 \frac{1+0.73e^{-0.48t}}{1-0.73e^{-0.48t}}$  som angitt i oppgaven.

(RKvadrat[Liste1,v] er lik 1.000 så dette er en god kurvetilpasning.)

1	$v'(0)$ <input type="radio"/> $\approx -73.49$
2	Grenseverdi[v, inf] <input type="radio"/> $\approx 7.89$
3	$s := \int_0^{120} v$ <input type="radio"/> $s := 989.64$

b)  $v'(0) = -73 \text{ m/s}^2$  er momentanakselerasjonen idet fallskjermen utløses.  
(Farten avtar altså med over 70 m/s det første sekundet.)

Sånn sett er modellen ikke så god helt i starten, dette er jo over 7g i utgangspunktet og ville nok være i overkant brutal nedbremsing for et menneske.)

c) Farten stabiliserer seg da  $t \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-kt} \rightarrow 0 \Rightarrow v(t) \rightarrow 7.9$  [m/s]

d) Da farten er den deriverte av veilengden;  $v(t) = s'(t)$ , har vi at veilengden er  $s(t) = \int_0^t v(t)dt$ , så etter 120 sekunder har han falt

$$s = \int_0^{120} v(t)dt \approx 990 \text{ [m]}$$

---