Formelsamling i matematikk - R2

Ulven 24.09.2014

(***Under arbeid...***)

Vær snill å rapportere eventuelle feil!

Her vil jeg prøve å få samlet alle formler jeg mener dere kan ha nytte av både på eksamen og i fremtidige studier.
Jeg vil merke formler som er i utkanten av læreplanen med ***.
Jeg vil også henvise til oppgaver i læreverket som eksemplifiserer spesielle formler.

Vektorer

Innskuddssetningen:

Finne koordinater til punkt ved å gå fra Origo $O = (0,0)$ langs kjente punkt og vektorer:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \ldots + \overrightarrow{ZP} = [x,y] \Leftrightarrow P = (x,y)$$

Skalarprodukt:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

Lengde:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}$$

Normale:

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (Ekvivalens forutsetter at vi definerer: $\vec{0}$ står normalt på alt!)

Parallelle:

$\vec{u} \| \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v}$ (eller $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$)

P, Q og R på linje:

$\overrightarrow{PQ} \| \overrightarrow{QR} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{QR}$ (eller $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR} = \vec{0}$)

Projeksjonen av $\vec{u}$ på $\vec{v}$:

$$p = |\vec{u}|\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

$$\vec{p} = p\,\vec{e} = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|}\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$$

Vinkel:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Vektorprodukt:

$$\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = [y_u z_v - z_u y_v, -(x_u z_v - z_u x_v), x_u y_v - y_u x_v]$$

Lengden av vektorproduktet:

Regnes enklest ut med: $|\vec{w}| = \sqrt{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2}$

Areal av trekant og parallellogram utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$

$\text{Areal}_{\text{parallellogram}} = |\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2}$
(Trekant blir selvfølgelig halvparten av dette.)
(*Gjelder også i planet selvom vektorproduktet ikke er definert, da uttrykket under rottegnet er definert uansett!*)

Avstand fra et punkt P til en linje l i planet:

Lag en normalvektor $\vec{n}$. (Bytt $x-$ og $y-$koordinat og bytt fortegn på en av dem!)
Hvis A er et punkt på linjen har vi: $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n} = \left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos(\alpha)$
Avstanden vi søker: $d = \left|\left|\overrightarrow{AP}\right|\cos(\alpha)\right| = \left|\frac{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos(\alpha)}{|\vec{n}|}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|$

Avstand fra et punkt P til en linje l i rommet:

Metoden over virker ikke, da det er uendelig mange normalvektorer til en linje i rommet.

Punkt A på linjen og retningsvektor $\vec{r}$:
$$d = \frac{\text{Areal utspent av } \overrightarrow{AP} \text{ og } \vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{r}\right|}{|\vec{r}|} = \frac{\sqrt{\left|\overrightarrow{AP}\right|^2|\vec{r}|^2 - (\overrightarrow{AP}\cdot\vec{r})^2}}{|\vec{r}|}$$
(Kan også brukes i planet da arealformelen (rottegnet) gjelder i planet også selvom ikke vektorproduktet er definert.)

Ligning for plan:

Gitt punkt i planet $A(x_a, y_a, z_a)$, normalvektor $\vec{n} = [a, b, c]$ og $P(x, y, z)$ et fritt punkt i planet

$\overrightarrow{AP} = [x - x_a, y - y_a, z - z_a]$

$\overrightarrow{AP}$ må stå normalt på $\vec{n}$ for alle P:

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Leftrightarrow [x - x_a, y - y_a, z - z_a][a, b, c] = 0 \Leftrightarrow ax - ax_a + by - by_a + cz - cz_a = 0 \Leftrightarrow$
$ax + bx + cy + (-ax_a - by_a - cz_a) = 0$

Eller $ax + bx + cy + d = 0$ der $d = -ax_a - by_a - cz_a$

Ligning for plan, gitt tre punkter A,B,C:

Lag $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. Finn en normalvektor $\vec{n} = [a, b, c]$ som $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Parameterfremstilling for plan som inneholder punktet $P = (x_p, y_p, z_p)$ og vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Vektorligning: $[x, y, z] = [x_p, y_p, z_p] + s\vec{u} + t\vec{v}$

Parameterfremstilling: $\left\{ \begin{array}{c} x = x_p + sx_u + tx_v \\ y = y_p + sy_u + ty_v \\ z = z_p + sz_u + tz_v \end{array} \right\}$

Avstand fra punkt til plan

Metoden er helt analog med projeksjonsformelen for avstanden fra et punkt til en linje i planet:

$d = \left| \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$ eller $d = \frac{|ax_p + by_p + cz_p + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Volum av parallellepiped utspent av $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$:

$V = \left| (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \right|$

Firkantet pyramide blir en tredjedel av dette.

Trekantet pyramide blir en sjettedel av dette.

A, B, C og D i samme plan: $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ (Utspenner et flatt parallellepiped med volum 0...)

Parallelle plan:

To plan α og β er parallelle hvis normalvektorene er parallelle: $\overrightarrow{n_\alpha} = k\,\overrightarrow{n_\beta}$

Vinkelen mellom to plan:

Finner vinkelen v mellom normalvektorene til planene.

$0^\circ \leq v \leq 90^\circ$: v er vinkelen mellom planene

$90 < v \leq 180^\circ$: $180^\circ - v$ er vinkelen mellom planene

Vinkelen mellom plan og linje:

Finner vinkelen β mellom normalvektor til plan og retningsvektor til linje.
$\beta \leq 90^\circ$: $90^\circ - \beta$ er vinkelen mellom planet og linjen
$90^\circ \leq \beta^\circ$: $\beta - 90^\circ$ er vinkelen mellom planet og linjen

Avstanden mellom to linjer l og m:

Med P og Q på hver sin linje, er avstanden projeksjonen av $\overrightarrow{PQ}$ på en normalvektor til linjene:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{r_l}\times\overrightarrow{r_m})\right|}{\left|\overrightarrow{r_l}\times\overrightarrow{r_m}\right|}$$

Viktig:

Mange av avstandsformlene har tall-verditegn som i oppgaver kan gi ligninger av typen:

$$|at+b| = c$$

Pass på ikke å miste løsninger ved å gjøre følgende omformulering:

$$|at+b| = c \iff at+b = c \vee at+b = -c$$

Kurver i rommet:

Vektorligning:

Vektor fra origo til et punkt på linjen gjennom $A(x_a, y_a, z_a)$ og $B(x_b, y_b, z_b)$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$$

$$[x, y] = [x_a, y_a, z_a] + t[x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a]$$

Parameterfremstilling:

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_a + (x_b - x_a)t \\ y = y_a + (y_b - y_a)t \\ z = z_a + (z_b - z_a)t \end{array}\right\}$$

Parameterfremstillingen $\left\{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right\}$ og ***vektorfunksjonen*** $\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$

representerer det samme, koordinatene til et punkt $P = (x, y)$ som beveger seg langs en kurve.

Den deriverte av posisjonsvektoren $\vec{r}'(t) = [x'(t), y'(t), z'(t)]$ kan brukes til flere ting:

- Finne hastighetsvektoren $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$, når vi har en fysisk gjenstand som beveger seg og t er tiden
- Finne banefarten $\left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$
- Finne en tangentvektor $\vec{r}'(t)$ til en kurve som funksjon av t.

Deriverer vi en gang til, får vi akselerajonsvektoren i et punkt på kurven:
$\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = [x''(t), y''(t), z''(t)]$

Kuleflate:

$(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 + (z - z_S)^2 = R^2$

Volum av kulesegment:

$V = 2\pi Rh$

Algebra

Tre typer følger/rekker:

- **Aritmetiske**
  $a_n = a_1 + d(n-1)$
  $S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2}$
  Rekursiv definisjon: $a_n = a_{n-1} + d$
  Sjekk: Er differansen mellom alle ledd konstant?
  $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots ?$
- **Geometriske**
  $a_n = a_1 k^{n-1}$
  $S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k-1} \quad \rightarrow \quad S = \frac{a_1}{1-k}$ når $n \rightarrow \infty$, hvis $-1 < k < 1 \Leftrightarrow k^2 < 1$
  Rekursiv definisjon: $a_n = a_{n-1} \cdot k$
  Sjekk: Er forholdet mellom to påfølgende ledd konstant?
  $k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots ?$
- **"Andre"**, eksempelvis:
  - Harmonisk følge: $a_n = \frac{1}{n}$. Tilsvarende rekke divergerer, selvom følgen er konvergent! Eks: Er $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$ konvergent? Nei, fordi den bare er $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$ mindre enn den harmoniske, og den øker over alle grenser. (Sammenligningskriteriet.)
  - Trekanttallene, som er summen av n første heltallene: $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$
    $= \binom{n+1}{2}$ i Pascals trekant.
  - Tetraedertallene, som er summen av n første trekanttall: $a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
    $= \binom{n+2}{3}$ i Pascals trekant.
  - Kvadrattallene, som er summen av n første oddetall: $a_n = n^2 = \sum_{i=1}^{n}(2n-1)$
  - Pyramidetallene, som er summen av de n første kvadrattallene:
    $a_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$
    (Se lenger ned under lommeregner eller GeoGebra.)

Differanser

er ofte nyttige selv om følgen ikke er aritmetisk, så la oss generalisere litt:

Vi ser på a_n : $\quad 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, \ldots$

Differanser av differanser: $\Delta^{(2)}(a_n)$	2	2	2	2	2	$\ldots$		
Differanser: $\Delta(a_n) = d_i = a_{n+1} - a_n$	2	4	6	8	10	12	$\ldots$	
Følge: $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$:	0	2	6	12	20	30	42	$\ldots$
Sum: $A_n = A_1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i$:	0	0	2	8	20	40	70	112

(Obs: Summefølgene A_n litt forskjøvet i forhold til den vanlige rekken $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = A_{n+1} - A_1$ for å få konsekvenst system med differanser.)

- Differansene er en lineær funksjon (første grad)
- Differansene av differansene er en konstant funksjon (0te grad)
- Graden synker med en per differanse, altså må $a_n$være en andregradsfunksjon av n!
- Vi ser også at summefølgen A_n har a_n som differansefølge og derfor må være en tredjegradsfunksjon av n. Dermed er også $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ en tredjegradsfunksjon.
  (Kjenner vi en A_n kan vi finne den vanlige rekkesummen ut fra:
  $A_{n+1} = A_1 + \sum_{i=1}^{n} a_i = A_1 + S_n \Leftrightarrow S_n = A_{n+1} - A_1$.)

Vi må altså bestemme a, b og c i $a_n = an^2 + bn + c$
eller a, b, c, d i $S_n = an^3 + bn^2 + cn + d$

Nok med tre punkter på funksjonsgrafen: $(1,0), (2,2), (3,6)$ for å finne a_n med regresjon:
Ti-8x-kalkulatorer:

{1,2,3} STO▹L1 Liste med uavhengig variabel n
{0,2,6} STO▹L2 Liste med avhengig variabel a_n
STAT, CALC, 5:QuadReg L1,L2

eller i GeoGebra:

L={(1,0),(2,2),(3,6)}
a(x)=regpoly[L,2]

Vi får: $a_n = n^2 - n = n(n-1)$

Mer formelt har vi:

$$\Delta(A_n) = A_{n+1} - A_n = a_n$$

Da har vi at rekken:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \ldots + (A_{n+1} - A_n) = A_{n+1} - A_1$$

da alle ledd unntatt A_1 og A_{n+1} forekommer to ganger med motsatt fortegn og derfor kanselleres!
Sagt på en annen måte:

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = A_{n+1} - A_1$, hvis A_n oppfyller kravet $\Delta(A_n) = A_{n+1} - A_n = a_n$

(Som minner om: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ og $F'(x) = f(x)$!)

Summering av rekker (når vi har funksjonsuttrykk):

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, der $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$:

a(i):=n (n+1)/2
Sum(a(i),i,1,50) gir **22100** i GeoGebra
Sum(a(i),i,1,n) gir $\frac{1}{6}\mathbf{n}^3+\frac{1}{2}\mathbf{n}^2+\frac{1}{3}\mathbf{n}$

Finne eksplisitt definisjon når vi har rekursiv definisjon:
Rekke har differanser som er kvadrattall, altså rekursiv definisjon

$\{a_n = a_{n-1} + n^2, \quad a_1 = 1\}$ eller $\{a_{n+1} = a_n + (n+1)^2, \quad a_1 = 1\}$

Differanser: $d_n = a_{n+1} - a_n = (n+1)^2$

Formelen $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$ gir da i GeoGebra CAS:

d(n):=(n+1)^2

a(n):=1+Sum(d(i),i,1,n-1) gir $\frac{1}{3}\mathbf{n}^3+\frac{1}{2}\mathbf{n}^2+\frac{1}{6}\mathbf{n}$

Praktiske oppgaver:

"Tabell-oppgaver":
Oppgaver med akkumulering av penger, medisin, dopingmidler, tilførsel av gift o.s.v.

Noe avtar med k i hver tidsenhet og en ny dose d tilføres i hver tidsenhet. Hvor mye akkumuleres over tid?

Rekursivt: $\{a_n = a_{n-1}k + d, a_1 = d\}$

Lag tabell:

1	2	3	4	…	n
d	dk	dk^2	dk^3	…	dk^{n-1}
	d	dk	dk^2	…	dk^{n-2}
		d	dk	…	…
			d	…	dk^2
					dk
					d

Akkumulert sum (siste kolonne): $a_n = d + dk + dk^2 + dk^{n-1}$,
geometrisk rekke med $a_1 = d$, k og n ledd slik at: $a_n = d\frac{k^n-1}{k-1}$.

En variant er når vi har en startverdi a istedenfor d, eksempelvis en dyrebestand der det skytes en fast kvote hvert år (d negativ) og vekstfaktoren i bestanden er k (ut fra fødte/døde): $\{a_1 = a, \quad a_n = a_{n-1}k + d\}$

1	2	3	4	5	…	n
a	ak	ak^2	ak^3	ak^4	…	ak^{n-1}
	d	dk	dk^2	dk^3	…	dk^{n-2}
		d	dk	dk^2	…	dk^{n-3}
			d	dk	…	…
				d	…	dk^2
						dk
						d

Altså en geometrisk rekke $(d + dk + dk^2 + dk^{n-2})$ og et ledd ak^{n-1},
så vi får:

$$a_n = d\frac{k^{n-1}-1}{k-1} + ak^{n-1}$$

Variant av geometrisk rekke:

Vanlig geometrisk: $S_n = a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1}$
En variant: $S_n = a + 2ak + 3ak^2 + \ldots + nak^{n-1}$
Også her er tabell lurt:

$$
\begin{aligned}
S_n = a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} &+ \\
ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} &+ \\
ak^2 + \ldots + ak^{n-1} &+ \\
\ldots & \\
+ak^{n-1} &
\end{aligned}
$$

Radvis:

$$
\begin{aligned}
&= a\tfrac{k^n-1}{k-1} + ak\tfrac{k^{n-1}-1}{k-1} + ak^2\tfrac{k^{n-2}-1}{k-1} + ak^{n-1} \\
&= a\tfrac{k^n-1}{k-1} + a\tfrac{k^n-k}{k-1} + a\tfrac{k^n-k^2}{k-1} + a\tfrac{k^n-k^{n-1}}{k-1} \\
&= \tfrac{a}{k-1}(nk^n - (1 + k + k^2 + k^{n-1}) \\
&= \tfrac{a}{k-1}(nk^n - \tfrac{k^n-1}{k-1}) = \tfrac{a}{(k-1)^2}(nk^{n+1} - (n+1)k^n + 1)
\end{aligned}
$$

Økonomiske beregninger:

Stort sett ligninger med geometriske rekker: Tegn figurer/tabell som vist over og finn a_1, k og antall ledd, n!

Induksjonsbevis:

Eksempel: Vise at summen av n tall i følgen $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ er $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

$n = 1$: $a_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$, $S_1 = 1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ $OK!$

n til $n + 1$: Må vise at $S_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+2}$ hvis vi antar at $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

$$
S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - (\frac{(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}) = 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2} \quad OK!
$$

Trigonometri

Tegn sirkler når dere arbeider med sinus, cosinus og tangens ligninger!
Husk at ligninger med $\sin x/\cos x/\tan x$ har to løsninger i hvert omløp, mens $\sin nx, \cos nx, \tan nx$ har $2n$ løsninger i hvert omløp.

$\sin x$: $x = \alpha \vee x = \pi - \alpha$ (Symmetrisk om x-aksen)
$\cos x$: $x = \alpha \vee x = 2\pi - \alpha$ (eller $-\alpha$) (Symmetrisk om y-aksen)
$\tan x$: $x = \alpha \vee x = \alpha + \pi$ (Symmetrisk om origo)

Eksakte trigonometriske verdier

v	0°	15°	18°	30°	45°	60°	72°	75°	90°
$\sin v$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0
$\tan v$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$	∞

Vi må kunne sinus, cosinus og tangens for $0, 30, 45, 60$ og 90 grader i hodet.
(Skader ikke å kjenne til $15, 18, 72$ og 75 også :-)

Absolutt vinkelmål:

$v[^\circ] = \frac{180 \cdot v[rad]}{\pi}$ $\quad v[rad] = \frac{\pi \cdot v[^\circ]}{180}$ $\quad$ (v bare måltall her)

0°	15°	18°	30°	45°	60°	72°	75°	90°	180°	270°	360°
0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Trigonometriske omforminger

De formlene vi bør kjenne til er disse:

Sammenheng:	Hvorfor:
I: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	Trekant med hypotenus 1,Pythagoras
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$	"
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$	"
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$	"
$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan x}$	"
$\sin(\pi - x) = \sin x$	Definisjonssirkelen
$\cos(2\pi - x) = \cos x$	"
$\tan(x + \pi) = \tan x$	"
$\sin x = \frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$	Trekant: Sider 1,$\tan x$ og $\sqrt{1 + \tan^2 x}$
$\cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$	"
II: $\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$	
III: $\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$	
IV: $\tan(u \pm v) = \frac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u \tan v}$	$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{II}}$ og divisjon med $\cos u \cos v$
V: $\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v$ $= 2\cos^2 v - 1$ $= 1 - 2\sin^2 v$	II med $u = v$ og deretter I (se 2.244)
VI: $\sin 2v = 2 \sin v \cos v$	III med $u = v$
$\tan 2v = \frac{2\tan v}{1-\tan^2 v}$	IV med $u = v$
VII: $\cos v = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2v}{2}}$	V løst m.h.p. $\cos v$
VIII: $\sin v = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2v}{2}}$	V løst m.h.p. $\sin v$

V→VII:

$\cos 2v = 2\cos^2 v - 1 \Leftrightarrow \cos^2 v = \frac{1+\cos 2v}{2} \Leftrightarrow \cos v = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2v}{2}}$

Kan også formuleres slik: (formel for halve vinkel)

$\cos(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

V→VIII:

$\cos 2v = 1 - 2\sin^2 v \Leftrightarrow \sin^2 v = \frac{1-\cos 2v}{2} \Leftrightarrow \sin v = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2v}{2}}$

Kan også formuleres slik: (formel for halve vinkel)

$\sin(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

Funksjoner

Derivasjon:

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$(x^r)' = rx^{r-1}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$		

Generelle derivasjonsregler:

$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$
$f(ax+b)' = af(ax+b)$ (Vha. kjerneregel)

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$f'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$ der $u = g(x)$

Periodiske funksjoner

$a\sin(cx) + b\cos(cx) = d$
kan gjøres om til:
$\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(cx+\varphi) = d$, der $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ og φ er i kvadranten til punktet (a,b).
eller
$\sqrt{a^2+b^2}\,\cos(cx-\varphi) = d$, der $\tan\varphi = \frac{a}{b}$ og φ er i kvadranten til punktet (b,a).

Konstruksjon av $f(x) = A\sin(cx+\varphi) + L = A\sin(c(x-\phi)) + L$ ut fra avlesningene:
$T, f_{\max}, f_{\min}$ og faseforskyving ϕ $(= \frac{\varphi}{c})$:

Amplitude: $A = \frac{f_{\max}-f_{\min}}{2}$
Likevektslinje: $L = \frac{f_{\max}+f_{\min}}{2}$
Omløpshastigheten: $c = \frac{2\pi}{T}$ $\Leftarrow$Les av periode:$T = \frac{2\pi}{c}$
Faseforskyvning: $\varphi = c\phi$ $\Leftarrow$Les av faseforskyving: $\phi = \frac{\varphi}{c}$

(Hvis forskyvning ϕ er vanskelig å lese av, kan man lese av hvor $f(x_1) = d$ (krysning av likevektslinjen,
eventuelt $f(x_2) = f_{\min}$ eller $f(x_3) = f_{\max}$), og regne ut:
$cx_1 + \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = -cx_1$ eventuelt $cx_2 + \varphi = \frac{3\pi}{2}$ eller $cx_3 + \varphi = \frac{\pi}{2}$.)

Modellering og regresjon:

Funksjonstype:	Lommeregner (TI):	GeoGebra (pre-release):
$f(x) = ax + b$	LinReg L1,L2	RegPoly[L,1]
$f(x) = ax^2 + bx + c$	QuadReg L1,L2	RegPoly[L,2]
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	CubicReg L1,L2	RegPoly[L,3]
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	QuartReg L1,L2	RegPoly[L,4]
$f(x) = a + b \ln x$	LnReg L1,L2	RegLog[L]
$f(x) = ae^{bx}$	ExpReg L1,L2	RegEksp[L]
$f(x) = ax^b$	PwrReg L1,L2	RegPot[L]
$f(x) = L + A\sin(cx + \varphi)$	SinReg L1,L2	RegSin[L]
$f(x) = \frac{a}{a+be^{cx}}$	Logistic L1,L2	RegLogist[L]

Integraler

Definisjon av ubestemt integral: $F(x) = \int f(x)dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

Definisjon av bestemt integral (rektangler):

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$, der $x_i = a + (i-1)\Delta x$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Utregning i praksis: Fundamentalteoremet i analysen (funksjonslæren):

$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$ der $F'(x) = f(x)$

Areal under kurve avgrenset av x-aksen, $f(x)$, $x = a$ og $x = b$: $A = \int_a^b f(x)\,dx$

Under x-akse: $A = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$

Mellom $f(x)$ og $g(x)$: $A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$, $f(x) > g(x)$ når $a \le x \le b$

Volum: $V = \int_a^b A(x)\,dx$, der $A(x)$ er formelen for arealet av en snittflate i romlegemet normalt på x-aksen.

Spesialtilfelle: Omdreiningslegeme: $A(x) = \pi(f(x))^2$ som gir: $V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$

Tilnærming: $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$, der $x_i = a + (i-1)\Delta x$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$\sum_{i=1}^{n} a_n \approx \int_{-0.5}^{n+0.5} f(x)dx$, der $a_n = f(n)$ og $f(n)$ er relativt stor ift. $\Delta x = 1$.

Gjennomsnittsverdi: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$

Ubestemte integraler:

(Alle skal selvfølgelig i tillegg ha: "$+C$"!)

$f(x)$	$\int f(x)dx$
k	kx
x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1}, r \neq -1$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\ln x$	$x \ln x - x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$\frac{a}{x-b}$	$a \ln\lvert x-b\rvert$
$\tan^2 x$	$\tan x - x$
$\cos^2 x$	$\int(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2})dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$
$\sin^2 x$	$\int(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2})dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$
	...

Generelle formler og metoder:

$\int(af(x) + bg(x))\, dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$

$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$ der $F'(u) = f(u)$.

Delvis integrasjon: $\int u'v = uv - uv'$

Variabelskifte: $\int f(u)u'(x)dx = \int f(u)du,$ der $du = u'(x)dx$

Delbrøk: $\frac{a}{(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-b} + \frac{B}{x-c}$

(A og B finnes ved å løse ligningssystem.)

Familier av funksjonstyper:

Polynom	$x, x^2, \ldots$
Eksponential	$5^x, e^{-3x}, \ldots$
Logaritmer	$\log(x), \ln(x), \ldots$
Trigonometri	$\sin(x), \cos(x), \tan(x), \ldots$

Hvis vi har forskjellige familier representert i integralet (som produkt) ligger det an til ***delvis*** integrasjon!
Eksempler: $\int x\cos(x)dx, \int x^2\ln(x)dx, \int e^x \sin(x)dx, \ldots$

Valg av u og v: Velg v lik en funksjon som blir enklere etter derivasjon, eksempelvis
$x, x^2, \ldots$ som blir en grad lavere hver gang
eller $\ln(x)$, som blir $\frac{1}{x} = x^{-1}$ som ofte kan forkortes bort mot en annen x^n.

Hvis det er samme type funksjon, eller sammensatte funksjoner, ligger det an til ***variabelskifte***.
Eksempler: $\int \cos^2(x)\sin(x)dx, \int \sqrt{\tan(x)}\, \frac{1}{\cos^2(x)}dx, \ldots$

Valg av u: Let etter en del av uttrykket som er *den deriverte av en annen del* av uttrykket:
$\int \cos^2(x)\sin(x)dx$: Her er $\sin(x)$ omtrent den deriverte av $\cos(x)$ (bortsett fra fortegn), altså:
$u = \cos(x)$
$\frac{du}{dx} = -\sin(x) \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin(x)}$
Setter inn u og dx (ikke rør resten):
$\int u^2 \sin(x)\frac{du}{-\sin(x)} = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3(x)}{3} + C$

Delvis integrasjon:

Valg av u og v:
Velg v lik en funksjon som blir enklere etter derivasjon, eksempelvis $x, x^2, \ldots$
som blir en grad lavere hver gang eller
$\ln(x)$, som har $\frac{1}{x} = x^{-1}$ som derivert, og $\frac{1}{x}$ kan ofte forkortes bort mot en annen x i x^n.

Tre viktige eksempler:

Eksempel 1:
Polynomfunksjoner (x^n) blir enklere ved derivasjon og er derfor kandidater for v:

$$I = \int x \cdot \sin(x)dx \qquad u' = \sin(x) \Rightarrow u = -\cos(x), \qquad v = x \Rightarrow v = 1$$

$$I = -\cos(x)x - \int(-\cos(x))1dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$$

Eksempel 2
Logaritmefunksjoner blir enklere ved derivasjon og er derfor kandidater for v:

$$I = \int x^3 \ln(x)dx \qquad u' = x^3 \Rightarrow u = \frac{x^4}{4}, \qquad v = \ln x \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$$

$$I = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

Eksempel 3:
Eksponentialfunksjoner og trigonometriske funksjoner "gjentar seg" og vi må derfor gjøre delvis integrasjon i "to runder":

$$I = \int e^x \sin x(x)dx \qquad u' = e^x \Rightarrow u = e^x, \qquad v = \sin x \Rightarrow v' = \cos x$$

1) $\quad I = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - I_2$

2) $\quad I_2 = e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + I$

$$I = e^x \sin x - (e^x \cos x + I) \Leftrightarrow 2I = e^x \sin x - e^x \cos x \Leftrightarrow$$
$$I = \frac{1}{2}e^x \sin x - \frac{1}{2}e^x \cos x + C$$

Differensialligninger

Eksakte DL: (6.1)

Differensialligninger som kan løses direkte ved integrering:

$$y' = f(x) \qquad \Leftrightarrow y = \int f(x)dx$$

Separable: (6.3)

Differensialligninger som kan omformes til: $\quad f(y)y' = g(x)$

Integrasjon og kjerneregel gir løsning:

$$\int f(y)y'dx = \int g(x)dx \Leftrightarrow \int f(y)dy = \int g(x)dx \Leftrightarrow F(y) = G(x) + C,$$

der $F'(y) = f(y)$ og $G'(x) = g(x)$

Integrerende faktor: (6.4)

Lineære differensialligninger på formen: $y' + p(x)y = q(x)$

$IF = e^{\int p(x)dx} = e^{P(x)}, \qquad$ der $P'(x) = p(x)$

Multiplikasjonsregel gir igjen:

$$y'e^{P(x)} + ye^{P(x)}p(x) = q(x)e^{P(x)} \Leftrightarrow (ye^{P(x)})' = q(x)e^{P(x)} \Leftrightarrow$$

$$ye^{P(x)} = \int q(x)e^{P(x)}dx \Leftrightarrow y = e^{-P(x)}\int q(x)e^{P(x)}dx$$

Bruk av derivasjonsreglene for produkt og brøk:

$$xy' + y = f(x) \Leftrightarrow (xy)' = f(x) \Leftrightarrow xy = \int f(x)dx \Leftrightarrow y = \tfrac{1}{x}\int f(x)dx$$

$$xy' - y = f(x) \Leftrightarrow \tfrac{xy'-y}{x^2} = \tfrac{f(x)}{x^2} \Leftrightarrow (\tfrac{y}{x})' = \tfrac{f(x)}{x^2} \Leftrightarrow y = x\int \tfrac{f(x)}{x^2}dx$$

(Hvis man har y^2 på høyre side: $xy' - y = f(x)y^2$, kan også $\tfrac{y-xy'}{y^2} = -f(x) \Leftrightarrow (\tfrac{x}{y})' = -f(x)$ være aktuell.)

Med n heltallig går også:
$$xy' + ny = f(x) \Leftrightarrow x^n y' + nx^{n-1}y = f(x)x^{n-1} \Leftrightarrow (x^n y)' = f(x)x^{n-1} \Leftrightarrow y = x^{-n}\int f(x)x^{n-1}dx$$

$$xy' - ny = f(x) \Leftrightarrow \frac{x^n y' - nx^{n-1} y}{(x^n)^2} = f(x)\frac{x^{n-1}}{x^{2n}} \Leftrightarrow (\frac{y}{x^n})' = f(x)\frac{x^{n-1}}{x^{2n}} \Leftrightarrow y = x^{-n}\int f(x)\frac{x^{n-1}}{x^{2n}}dx$$

(Hvis n ikke er heltall, bruk integrerende faktor eller se Cauchy/Euler lenger ned.)

Andre ordens differensialligninger

Standardtilfellet med konstante koeffisienter

$y'' + ay' + b = 0$ har løsningen:

$y = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$	hvis $r^2 + ar + b = 0$ har ***to*** løsninger r_1 og r_2.
$y = (Cx + D)e^{r_1 x}$	hvis $r^2 + ar + b = 0$ bare har ***en*** løsning r_1.
$y = e^{\alpha x}(C\sin\beta x + D\cos\beta x)$	hvis $r^2 + ar + b = 0$ har ***komplekse*** løsninger $\alpha \pm \beta i$.

(Obs: βi opptrer alltid i par ($\pm\beta i$), så hvis det er komplekse løsninger, så er begge løsningene komplekse!
Vi kan ikke få en reell og en kompleks løsning!)

Reduksjon av orden når y –leddet mangler

Eksempel med tredjeordens lineær ligning:

$y''' + 2y'' + y' = 0$

Når y mangler kan vi skifte til $u = y'$ og får en ny ligning av andre orden:

$u'' + 2u' + u = 0$

Eksempel: $y'' + (y')^2 = 0$

$u = y'$ gir: $u' + u^2 = 0$ som er førsteordens og separabel:

$\int(-\frac{1}{u^2})du = \int dx \Leftrightarrow u^{-1} = x + D \Leftrightarrow u = \frac{1}{x+D}$

Tilbake til y:

$y' = \frac{1}{x+D} \Leftrightarrow y = \int \frac{1}{x+D}dx = \ln|x + D| + E = \ln|x + C_1| + C_2$

Ligninger med potenser av y'

$(y')^2 - 3x(y') + 2x^2 = 0$ er ulineær og våre metoder hittil takler ikke dette.

Men, det er en annengradsligning i y', så vi har:

$(y' - x)(y' - 2x) = 0 \Leftrightarrow y' = x \vee y' = 2x$

som gir oss to løsninger: $y = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C \vee y = \int 2xdx = x^2 + D$

Diverse triks med variabelskifte:

Innføre $2yy' = (y^2)' = u', \qquad u = y^2$

$yy' = x + xy^2 \qquad (y^2)' = 2x + 2xy^2 \Leftrightarrow u' = 2x + 2xu \Leftrightarrow u' - 2xu = 2x \qquad IF = e^{\int -2x dx} = e$

$(ue^{-x^2})' = 2xe^{-x^2} \Leftrightarrow ue^{-x^2} = \int 2xe^{-x^2} dx = C - e^{-x^2}$

$u = Ce^{x^2} - 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{Ce^{x^2} - 1}$

Flere triks

(Ikke i læreplan, men kan kanskje dukke opp varianter av dette på eksamen?)
(Kan også være verdt å ta vare på hvis man skal studere matematikk på universitetet, da ikke alle disse triksene er nevnt i standardverkene.)

*****Bernoulli's ligning:**

$y' + p(x)y = q(x)y^n$

Multiplikasjon med $(1-n)y^{-n}$ gir:

$(1-n)y^{-n}y' + p(x)(1-n)y^{-n+1} = q(x)(1-n)$

Vi gjør et variabelskifte: $u = y^{1-n}$ som har $u' = (1-n)y^{-n}y'$ og får derfor:

$u' + p(x)(1-n)u = q(x)(1-n)$ som kan løses med integrerende faktor.

(Poenget er at vi har klart å fjerne y fra høyre siden i den lineære ligningen!)

Eksempel:

$y' + xy = y^3$ Multipliserer med $(1-n)y^{-n} = -2y^{-3}$

$-2y^{-3}y' - 2xy^{-2} = -2$

$u' - 2xu = -2$ som løses med integrerende faktor.

*****Cauchy/Euler ligningen:**

$xy' + f(x)y = g(x)$

Variabelskifte:

$x = e^u \Leftrightarrow u = \ln x$ som gir:
$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{1}{x} = y'_u\frac{1}{x}$

Kan da gjøre om til:
$xy'_u\frac{1}{x} + f(x)y = g(x)$ eller $y'_u + f(e^u)y = g(e^u)$ Har skiftet ut x med u.

***Homogene i x og y

(Her betyr "homogen" noen annet enn at differensialligningen har 0 på høyre side...)

$y' = f(x,y)$ der alle ledd har samme samlede potens av x og y slik at vi kan gjøre om til

$y' = f(v)$ ved å innføre $v = \frac{y}{x}$ etter å ha dividert alle ledd med en passende x^n.

Da har vi: $y = vx$ og $y' = xv' + v$ og får derfor:

$xv' + v = f(v) \Leftrightarrow \int \frac{1}{f(v)-v}dv = \int \frac{1}{x}dx$

Eksempel:

$$y' = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2} \Leftrightarrow xv' + v = \frac{v}{1+v^2}, \quad v = \frac{y}{x}, \quad y' = xv' + v$$

$$xv' = \frac{v}{1+v^2} - \frac{v+v^3}{1+v^2} = \frac{-v^3}{1+v^2} \Leftrightarrow \int \frac{1+v^2}{v^3}dv = -\int \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow$$
$$\int (v^{-3} + v^{-1})dv = \int x^{-1}dx \Leftrightarrow -\frac{v^{-2}}{2} + \ln|v| = \ln|x| + D \Leftrightarrow$$

$\frac{x^2}{y^2} = 2\ln\frac{y}{x} + 2\ln x + 2\ln E$ (Ikke eksplisitt, men ligning for løsningskurve.)

$\frac{x^2}{y^2} = \ln Cy^2 \Leftrightarrow x = \pm y\sqrt{\ln Cy^2}$ (Kan altså løse som $x = f(y)$)

***Løse med hensyn på y og derivere

$y = f(x,y')$ blir da $y' = g(x,y',y'')$ som ikke inneholder y og derfor

kan reduseres til en ny førsteordens ligning:

$u = g(x,u,u')$ med $u = y'$ og $u' = y''$

Denne ***kan*** være enklere å løse enn den opprinnelige.

***Løse med hensyn på y' og derivere

Får da $y'' = g(x,y,y',y'')$.

Hvis dette skal ha noen hensikt må x eller y falle bort i derivasjonen.

Hvis y faller bort får vi $u' = (x,u,u')$ med $u = y'$ som ny variabel.

Hvis x faller bort får vi $u' = (y,u,u \cdot u'_y)$ med $u = y'$ og $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u'_y u$

***Skifte fra x til y som uavhengig variabel

Eksempel: $y' = \frac{1}{x+y} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = x + y \Leftrightarrow x'_y - x = y$
Løsning: $x = Ce^y - y - 1$ (Ligning i x og y.)

***Reduksjon av orden når vi kjenner en spesiell løsning

Denne metoden er også den mest kjente for å takle andreordens differensialligninger som ***ikke har konstante koeffisienter!***

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Hvis vi kjenner en spesiell løsning y_0 (som vi ser er løsning eller skjønner er løsning ut fra et praktisk eksempel), så kan vi innføre $y = u \cdot y_0$ og kan da skifte til variabelen u :

$u''y_0 + (2y_0' + p(x)y_0)u' = 0$ som er en ligning uten u og derfor kan reduseres til en første ordens ligning:

$y_0v' + (2y_0' + p(x)y_0)v = 0$ der $v = u'$ og $y = u \cdot y_0$

***Innføring av $u = (y')^2$ i ulineære andreordens ligninger

Hvis vi har ledd med $y''y'$ og $(y')^2$ kan vi skifte til variabelen

$u = (y')^2$, der $u' = 2y'y''$

(Kan eventuelt lage en slik ligning ved å multiplisere med y'.)

Eksempel:
$y''y' - y^2 = 0 \Leftrightarrow u' - 2u = 0$

Dette trikset funker best hvis x eller y ikke forekommer, men ofte kan man få integraler av typen
$y = \pm\int \sqrt{f(x)}\,dx$ som er vanskelige å løse når man går tilbake til y fra u...

***Autonom ligning - x mangler

$f(y, y', y'') = 0$

Innfører $y' = u$ og $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u'_y u$

Da får vi $f(y, u, u \cdot u'_y) = 0$, som er førsteordens med y som uavhengig variabel.