

# Heldagsprøve R2 - Våren 2017 - 03.05.17

## Løsningsskisser (versjon 11.05.17)

### Del 1 - Uten hjelpemidler - 3 timer

#### Oppgave 1

Deriver funksjonene:

$$\text{a) } f(x) = x \ln x \quad \text{b) } g(x) = 2 \sin(\ln x) \quad \text{c) } h(x) = \frac{x}{\cos x}$$

$$\text{a) Produktregel: } f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$\text{b) Kjernerregel: } g(x) = 2 \sin(u), \quad u = \ln x \\ g'(x) = 2 \cos(u) \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \cos(\ln x)$$

$$\text{c) Brøkregel: } h'(x) = \frac{1 \cos x - x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}$$

#### Oppgave 2

Regn ut integralene:

$$\text{a) } \int (x^2 - \sqrt{x} + \frac{2}{x}) dx \quad \text{b) } \int x \sin x dx \quad \text{c) } \int \frac{x}{x^2-1} dx$$

$$\text{a) } \int (x^2 - x^{\frac{1}{2}} + 2 \frac{1}{x}) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2 \ln x + C = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} (\sqrt{x})^3 + 2 \ln x + C$$

b) Delvis integrasjon:

$$\int x \sin x dx = -\cos x \cdot x - \int (-\cos x) 1 dx = -x \cos x + \sin x + C$$

c) Kjernerregel: (Kan også gjøres med delbrøksoppspaltning.)

$$u = x^2 - 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \\ \int \frac{x}{x^2-1} dx = \int \frac{x}{u} \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + C$$

#### Oppgave 3

$$\text{a) Vis at den deriverte av } f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \text{ blir } g(x) = -\frac{1}{2x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}$$

b) Bestem arealet avgrenset av grafen til  $g(x)$  og linjene  $x = 1$  og  $x = 2$ .  
(Burde stått: "... linjene  $x = 1$  og  $x = 2$  og  $x$ -aksen.)

c) Bestem volumet av den figuren vi får når vi dreier  $f(x)$   $360^\circ$  om  $x$ -aksen fra  $x = 1$  til  $x = 2$ .

a) Kjernerregel:  $f(x) = \sqrt{u}$ ,  $u = 1 + \frac{1}{x} = 1 + x^{-1}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}}(0 - x^{-2}) = \frac{-x^{-2}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = -\frac{1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \quad QED$$

b) Areal:  $\left| \int_1^2 g(x) dx \right| = |I_1^2[f(x)]| = \left| I_1^2 \left[ \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right] \right| = \left| \sqrt{1 + \frac{1}{2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{1}} \right| =$   
 $\left| \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{2} \right| = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

c) Volum:  $\pi \int_1^2 (f(x))^2 dx = \pi \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \pi \left[ x + \ln|x| \right]_1^2 =$   
 $\pi(2 + \ln 2 - (1 + \ln 1)) = \pi(\ln 2 + 1)$

## Oppgave 4

a) Finn konvergensområdet og summen  $s(x)$  av rekken  
 $(x-1) + (x-1)(1-2x) + (x-1)(1-2x)^2 + \dots$

b) Løs ligningene:

1)  $s(x) = -\frac{1}{2}$                       2)  $s(x) = 1$

a) Geometrisk rekke med  $a_1 = x-1$  og kvotient  $k = (1-2x)$

Konvergens:

$$-1 < k < 1 \Leftrightarrow -1 < 1-2x < 1 \Leftrightarrow -1 < 1-2x \wedge 1-2x < 1 \Leftrightarrow$$

$$x < 1 \wedge 0 < x \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Dessuten:  $a_1 = 0$  når  $x = 1$ .

): Konvergensområde:  $\langle 0, 1 \rangle$

b) I konvergensområdet blir summen  $s(x) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{x-1}{1-(1-2x)} = \frac{x-1}{2x}$

1)  $s(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

2)  $s(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x} = 1 \Leftrightarrow x = -1$  (Utenfor konvergensområdet)  
 ): Ingen løsning.

## Oppgave 5

a) Bruk induksjon til å bevise at

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{2}{n(n+1)} = 2 - \frac{2}{n+1}$$

b) Finn summen av den uendelige rekken

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots$$

- a) Vi kaller summen  $S(n) = 2 - \frac{2}{n+1}$   
 $n = 1$  :  
 Sum av ett ledd:  $S(1) = a_1 = 1$   
 Formel:  $S(1) = 2 - \frac{2}{1+1} = 1$   
 OK

Induksjonstrinn:  $n \rightarrow n + 1$ :

Må vise at  $S(n + 1) = 2 - \frac{2}{n+2}$  hvis vi antar at  $S(n) = 2 - \frac{2}{n+1}$  gjelder for en  $n$ .

$$S(n + 1) = S(n) + a_{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1} + \frac{2}{(n+1)(n+2)} = 2 - \left( \frac{2(n+2)-2}{(n+1)(n+2)} \right) =$$

$$2 - \frac{2n+4-2}{(n+1)(n+2)} = 2 - \frac{2(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 2 - \frac{2}{n+2}$$

OK

b)  $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{2}{n+1} \right) = 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 2 - 0 = 2$

## Oppgave 6

En kuleflate  $\alpha$  har ligningen  $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 44 = 0$

- a) Finn sentrum  $S$  og radius  $R$  til kuleflaten  $\alpha$ .
- b) Vis at kuleflaten går gjennom punktet  $P = (3, -1, 4)$
- c) Planet  $\beta$  har ligningen  $x + y + z + 4 = 0$ . Finn sentrum  $T$  og radius  $r$  i skjærings sirkelen mellom planet  $\beta$  og kuleflaten  $\alpha$ .
- d) Finn skjæringspunktene mellom en linje gjennom  $S$  og  $T$  og kuleflaten  $\alpha$ .

a)  $\alpha$ :  $x^2 + y^2 - 2y + 1^2 + z^2 + 4z + 2^2 = 44 + 1^2 + 2^2 \Leftrightarrow$   
 $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 7^2$

): Sentrum:  $S = (0, 1, -2)$       Radius:  $R = 7$

b)  $\vec{SP} = [3, -2, -6] \Rightarrow |\vec{SP}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = 7 = R$

Viser at  $P$  har avstand lik radien fra sentrum.  $P$  må derfor ligge på kuleflaten.  
 (Kan også sjekke om koordinatene 3, -2 og -6 passer i ligningen for kuleflaten.)

c) Avstand fra  $\beta$  til  $S$ :  $d = \left| \frac{x_S + y_S + z_S + 4}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \right| = \left| \frac{0 + 1 - 2 + 4}{\sqrt{3}} \right| = \sqrt{3}$

En dertil egnet figur vil vise at Pythagoras gir:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{7^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{46}$$

Normalvektor  $\beta$ :  $\vec{n} = [1, 1, 1]$

$$\vec{OT} = \vec{OS} \pm d \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \vec{OS} \pm d \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{n} = [0, 1, -2] \pm \sqrt{3} \frac{1}{\sqrt{3}} [1, 1, 1] =$$

$$\begin{aligned} & [0, 1, -2] \pm [1, 1, 1] \\ \vec{OT} = [1, 2, -1] \vee \vec{OT} = [-1, 0, -3] \\ & ): \quad T = (-1, 0, -3) \quad (\text{da } (1, 2, -1) \text{ ikke ligger i planet } \beta.) \end{aligned}$$

d) Skjæringspunktene på normal gjennom planet  $\beta$  og  $S$ , i avstand  $R$  fra  $S$ :

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= \vec{OS} \pm R \vec{e} = \vec{OS} \pm R \frac{1}{|\vec{n}|} \vec{n} = [0, 1, -2] \pm 7 \frac{1}{\sqrt{3}} [1, 1, 1] \\ \vec{OQ} &= \left[ \frac{7}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{7}{\sqrt{3}}, -2 + \frac{7}{\sqrt{3}} \right] \vee \vec{OQ} = \left[ -\frac{7}{\sqrt{3}}, 1 - \frac{7}{\sqrt{3}}, -2 - \frac{7}{\sqrt{3}} \right] \\ & ): \quad Q_1 = \left( \frac{7}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{7}{\sqrt{3}}, -2 + \frac{7}{\sqrt{3}} \right) \\ & \quad Q_2 = \left( -\frac{7}{\sqrt{3}}, 1 - \frac{7}{\sqrt{3}}, -2 - \frac{7}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

### Oppgave 7

Løs ligningen  $\sqrt{3} \sin^2 x + \sin x \cos x - \sin x = 0$ ,  $x \in [0, 2\pi)$

$$\sin x (\sqrt{3} \sin x + \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pi$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \sin x + \cos x = 1 & \Leftrightarrow 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} & \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + m 2\pi \vee x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + n 2\pi \Leftrightarrow \\ & x = 0 \vee x = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

$$): \quad L = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$$

### Oppgave 8

Finn den spesielle løsningen av  $y'' + 4y' + 5y = 0$  når  $y(0) = 0$  og  $y'(0) = 2$

$$\text{Karakteristisk ligning: } r^2 + 4r + 5 = 0 \Leftrightarrow r = -2 \pm i$$

$$\text{Generell løsning: } y = e^{-2x}(A \sin x + B \cos x)$$

$$\begin{aligned} y(0) = 0: \quad 0 &= e^0(A \cdot 0 + B \cos 0) \Leftrightarrow B = 0 \\ &): \quad y = e^{-x} A \sin x \end{aligned}$$

$$y' = -e^{-x} A \sin x + e^{-x} A \cos x = A e^{-x} (\cos x - \sin x)$$

$$y'(0) = 2: \quad 2 = A e^0 (\cos 0 - \sin 0) \Leftrightarrow A = 2$$

$$\text{Spesiell løsning: } y = 2e^{-2x} \sin x$$

### Oppgave 9

Gitt differensialligningen  $y'' - \frac{1}{x}y' - \frac{8}{x^2}y = 0$ .

a) Vis at  $y = Cx^4 + \frac{D}{x^2}$  er en løsning til ligningen. (Du skal ikke løse ligningen her.)

b) Finn en løsning der  $y(1) = 2$  og  $y'(1) = 4$ .

$$\text{a) } y = Cx^4 + Dx^{-2} \text{ gir:} \\ y = 4Cx^3 - 2Dx^{-3} \text{ og } y'' = 12Cx^2 + 6Dx^{-4}$$

$$\begin{aligned} VS &= 12Cx^2 + 6Dx^{-4} - \frac{1}{x}(4Cx^3 - 2Dx^{-3}) - \frac{8}{x^2}(Cx^4 + Dx^{-2}) = \\ &= 12Cx^2 + 6Dx^{-4} - 4Cx^2 + 2Dx^{-4} - 8Cx^2 - 8Dx^{-4} = \\ &= (12C - 4C - 8C)x^2 + (6D + 2D - 8D)x^{-4} = 0 \end{aligned}$$

$$VS = HS \quad QED$$

$$\text{b) } y(1) = 2: \quad C + D = 2 \quad I$$

$$y' = 4Cx^3 - 2D\frac{1}{x^3}$$

$$y'(1) = 4: \quad 4 = 4C - 2D \Leftrightarrow 2C - D = 2 \quad II$$

$$I + II \text{ gir: } 3C = 4 \Leftrightarrow C = \frac{4}{3}$$

$$\text{Innsatt i II gir: } D = 2C - 2 = 2\frac{4}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

$$\text{): Spesiell løsning: } y = \frac{2}{3x^2} + \frac{4}{3}x^4$$

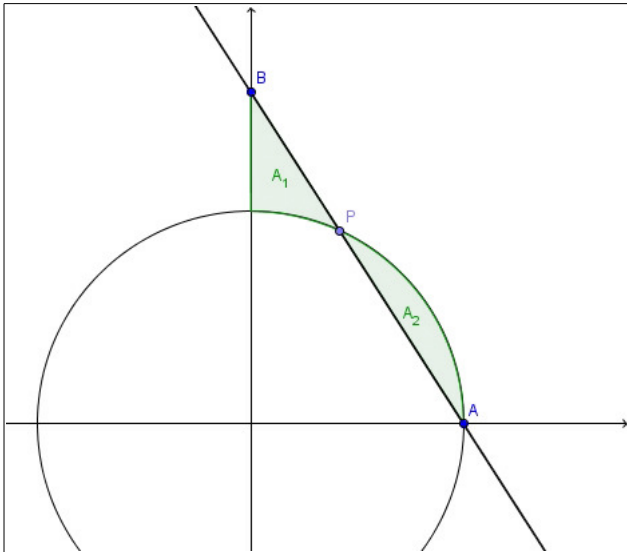

---

## Del 2 - Med hjelpemidler - 2 timer

### Oppgave 10

En sirkel med sentrum i Origo har radius  $R$ . Sirkelen skjærer  $x$ -aksen i punktet  $A$ . Et punkt  $P$ , med  $x$ -koordinat  $p$ , ligger på sirkellinjen i første kvadrant. Linjen gjennom  $A$  og  $P$  skjærer  $y$ -aksen i punktet  $B$ .

Bruk CAS til å bestemme hvilken verdi av  $p$  som gjør de to skraverte arealene  $A_1$  og  $A_2$  i figuren under like store:



CAS:

$$f(x) := \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$A := (R, 0)$$

$$P := (p, f(p))$$

$$l(x) := \text{Linje}[P, A]$$

$$A_1 := \text{IntegralMellom}[f, 0, p]$$

$$A_2 := \text{IntegralMellom}[f, l, p, R]$$

$$\text{Løs}[A_1 = A_2, p]$$

gir:  $p = R$  (Falsk løsning,  $A_1$  udefinert når  $p = R$  og  $A = P$ )

$$\text{og } p = \frac{R\pi^2 - 4R}{\pi^2 + 4} = R \frac{\pi^2 - 4}{\pi^2 + 4}$$

## Oppgave 11

Vi har en tallfølge  $a_n$  :  $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{2}{5}, \frac{5}{13}, \dots$

a) Vis at  $a_n$  er definert av at telleren er de  $n$  første partallene og nevneren er de  $n$  neste partallene.

b) Vis at summen av de  $n$  første partallene kan skrives  $S_n = n(n+1)$

c) Forklar at  $a_n = \frac{S_n}{S_{2n} - S_n}$ . Regn ut denne brøken.

$$\text{a) } a_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2+4}{6+8} = \frac{3}{7}, \quad a_3 = \frac{2+4+6}{8+10+12} = \frac{2}{5},$$

$$a_4 = \frac{2+4+6+8}{10+12+14+16} = \frac{5}{13} \quad \text{QED}$$

b) Kan vises med figur tall (rektangler), men bruker aritmetisk rekke med  $a_1 = 2$  og differanse  $d = 2$  som gir:

$$a_n = a_1 + d(n-1) = 2 + 2(n-1) = 2n$$

og

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2 + 2n) = n(n+1) \quad \text{QED}$$

$$c) a_n = \frac{2+4+6+\dots+2n}{(2n+2)+(2n+4)+\dots+(2n+2n)} = \frac{2+4+6+\dots+2n}{(2+4+6+\dots+(2n+2)+(2n+4)+\dots+4n)-(2+4+6+\dots+2n)} = \frac{S_n}{S_{2n}-S_n} \quad QED$$

(Nevner: Differanse av alle ledd fra 1 til  $2n$  minus alle ledd fra 1 til  $n$ .)

$$a_n = \frac{S_n}{S_{2n}-S_n} = \frac{n(n+1)}{2n(2n+1)-n(n+1)} = \frac{n(n+1)}{4n^2+2n-n^2-n} = \frac{n(n+1)}{3n^2+n} = \frac{n(n+1)}{n(3n+1)} = \frac{n+1}{3n+1}$$

## Oppgave 12

<b>Tid: [år]</b>	1996( $t = 0$ )	2007( $t = 11$ )
<b>Bestand: [par]</b>	5	43

Tabellen viser en telling av antall ulvepar i en bestand av ulver i det sentrale Idaho i 1996 ( $t = 0$ ) og 2007 ( $t = 11$ ).

I en modell for antall ulvepar  $y$  som funksjon av tiden  $t$  (målt i antall år etter 1996) gjelder følgende differensialligning:

$$y' = ky(y - 4)(90 - y)$$

*OBS: Feil i oppgave, skulle vært  $y' = k(y - 4)(90 - y)$*

Dette er en variant av den logistiske differensialligningen, hvor vi i tillegg til å ha en øvre grense for bestanden også har en minste grense, som bestanden ikke må komme under hvis den ikke skal dø ut.

a) Vis at  $y = \frac{90+4Ce^{-k86t}}{1+Ce^{-k86t}}$  er en generell løsning av differensialligningen.

Finnes det andre løsninger? (Som ikke er dekket av alle mulige valg av  $C$ ?)

b) Vis at  $k = 0.0045$  og  $C = -85$  ut fra verdiene i tabellen.

*OBS: Feil i oppgave, skulle vært  $C = 85$*

c) Hva er den øvre grense for antallet ulvepar i det sentrale Idaho?

d) Bruk modellen til å regne ut på hvilket tidspunkt veksthastigheten er størst.  
Hva er veksthastigheten på dette tidspunktet?

e) I hvilket år ville bestanden ha dødd ut hvis det var 3 fødedyktige ulvepar i 1996?

a) og b):

1	$f(t) := \text{LøsODE}[y=k(y-4)(90-y), y, t]$ $\rightarrow f(t) := \frac{4 c_6 e^{-86kt} - 90}{c_6 e^{-86kt} - 1}$
2	$f(0)=5$ $\rightarrow \frac{4 c_6 - 90}{c_6 - 1} = 5$
3	$f(11)=43$ $\rightarrow \frac{4 c_6 e^{-946k} - 90}{c_6 e^{-946k} - 1} = 43$
4	$\{\$2, \$3\}$ $\text{Løs: } \left\{ \left\{ c_6 = -85, k = -\frac{1}{946} \ln\left(\frac{47}{3315}\right) \right\} \right\}$
5	$\text{Numerisk}\{\$4,3\}$ $\rightarrow \{ \{ c_6 = -85, k = 0.0045 \} \}$

- a) Vi ser at løsningen er den samme som i oppgaven, hvis vi setter  $C = -c_6$  og multipliserer både teller og nevner med  $-1$ .

Dessuten ser vi at  $y = 4$  og  $y = 90$  også oppfyller differensialligningen.  $y = 90$  er dekket av  $C = 0$ , men  $y = 4$  er ikke dekket av endelige verdier for  $C$ , så  $y = 4$  må også være med i den generelle løsningen.

- b) På Fil, Innstillinger, Avrundinger bør du sette minst 3 gjeldende siffer for å få svarene  $C = 85$  og  $k = 0.0045$ .  
 ( $c_6 = -85$  i CAS tilsvarende  $C = 85$  i oppgaven.)

c)

6	$g(t) := (4(-85) \exp(-86 \cdot 0.0045 t) - 90) / (-85 \exp(-86 \cdot 0.0045 t) - 1)$ $\rightarrow g(t) := \frac{340 e^{-\frac{387}{1000}t} + 90}{85 e^{-\frac{387}{1000}t} + 1}$
7	$\text{Grenseverdi}[g, t, \text{inf}]$ $\rightarrow 90$
8	$g'(t)=0$ $\text{Løs: } \left\{ t = \frac{1000}{387} \ln(85) \right\}$
9	$\text{Numerisk}\{\$8,3\}$ $\rightarrow \{ t = 11.5 \}$
10	$g'(11.5)$ $\approx 8.32$

Vi definerer den spesielle løsningen som  $g(t)$ , der  $C$  og  $k$  har fått numeriske verdier.  $g(t)$  vil da bli vist i grafdelen. Grenseverdien er bærekraften 90.

- d) Størst vekst i vendepunktet, som vi finner i linje 8,9 og 10:  
 Bestanden øker da med 8.3 ulvepar/år.

- e) Regner med samme  $k = 0.0045$ , da vi ser i a) at bare  $C$  avhenger av startverdien



$f(0)$  og definerer ny funksjon  $h(t)$ .

Bestemmer deretter integrasjonskonstanten med  $h(0) = 3$  og lager en ny spesiell løsning  $i(x)$ :

11	$h(t) = (4 C \exp(-86.00045 t) - 90) / (C \exp(-86.00045 t) - 1)$ $\rightarrow h(t) := \frac{4 C e^{-\frac{387}{1000} t} - 90}{C e^{-\frac{387}{1000} t} - 1}$
12	$h(0) = 3$ NLøs: $\{C = 87\}$
13	$i(t) = (4 \cdot 87 \exp(-86.00045 t) - 90) / (87 \exp(-86.00045 t) - 1)$ $\rightarrow i(t) := \frac{348 e^{-\frac{387}{1000} t} - 90}{87 e^{-\frac{387}{1000} t} - 1}$
14	$i(t) = 0$ NLøs: $\{t = 3.495\}$

Bestanden dør altså ut etter ca. 3.5 år.

### Oppgave 13

I en trekantet pyramide  $ABCT$  er trekanten  $ABC$  grunnflate og  $T$  toppunkt.  $A = (-3, -4, 1)$ ,  $B = (-1, -3, 2)$ ,  $C = (0, -3, 3)$  og  $T = (-2, -1, -5)$ .

- Finn arealet av grunnflaten.
- Finn volumet av pyramiden.
- Finn ligningen for et plan som inneholder grunnflaten.
- Finn avstanden fra  $T$  til grunnflaten  $ABC$  på to forskjellige måter.

*Går fortest med GGB:*

$$A := (-3, -4, 1)$$

$$B := (-1, -3, 2)$$

$$C := (0, -3, 3)$$

$$T := (-2, -1, -5)$$

$$ab := \text{Vektor}[A, B]$$

$$ac := \text{Vektor}[A, C]$$

$$n := ab \times ac$$

(alt-shift-8 for vektormultiplikasjon)

$$A_{\{ABC\}} := |n|/2$$

$$at := \text{Vektor}[A, T]$$

$$V_{\{ABCT\}} := |(ab \times ac) \cdot at|/6$$

$$abc := \text{Plan}[A, B, C]$$

$$h := 3 V_{\{ABCT\}} / A_{\{ABC\}}$$

$$h_2 := \text{Avstand}[T, abc]$$

*Tar lengre tid å regne manuelt:*

$$\vec{AB} = [2, 1, 1], \quad \vec{AC} = [3, 1, 2]$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = [2, 1, 1] \cdot [3, 1, 2] = 6 + 1 + 2 = 9$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = [1, -1, -1]$$

a)

$$A_{ABC} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{|[1, -1, -1]|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{b) } V_{ABCT} = \left| \frac{(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AT}}{6} \right| = \left| \frac{([2, 1, 1] \times [3, 1, 2]) \cdot [1, 3, -6]}{6} \right| = \left| \frac{[1, -1, -1] \cdot [1, 3, -6]}{6} \right| = \frac{2}{3}$$

c) Normalvektor:  $n = \vec{AB} \times \vec{AC} = [1, -1, -1]$ 

$$\vec{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow [x + 3, y + 4, z - 1] \cdot [1, -1, -1] = 0 \Leftrightarrow x - y - z = 0$$

): Plan gjennom  $A, B$  og  $C$ :  $x - y - z = 0$ 

d) Avstanden som høyde i pyramide:

$$h = \frac{V_{ABCT}}{A_{ABC}} 3 = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} 3 = \frac{4}{3} \sqrt{3}$$

$$\text{Avstand plan til punkt: } \left| \frac{x_T - y_T - z_T}{\sqrt{3}} \right| = \left| \frac{-2 - (-1) - (-5)}{\sqrt{3}} \right| = \frac{4}{3} \sqrt{3}$$

$$\text{(Som tilsvarer projeksjonen: } \left| \frac{\vec{AT} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{[1, 3, -6] \cdot [1, -1, -1]}{\sqrt{3}} \right| = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3} \sqrt{3}$$


---