

# Løsningskisser: R2 - Integralregning

Versjon: 05.09.2016 (La inn litt flere kommentarer.)

Alle oppgaver skal gjøres ved regning unntatt der det eksplisitt står at man skal bruke CAS.

## Oppgave 1

Regn ut integralene:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int 4x^6 dx & \text{b) } \int \frac{\sqrt{x}}{2} dx & \text{c) } \int 2^x dx \\ \text{d) } \int e^{-x} dx & \text{e) } \int \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx & \text{g) } \int \frac{x^2-1}{x} dx \end{array}$$

Få frem reglene som brukes i mellomregninger:

$$\text{a) } \int 4x^6 dx = 4 \int x^6 dx = 4 \frac{x^{6+1}}{6+1} + C = \frac{4}{7} x^7 + C$$

$$\text{b) } \int \frac{\sqrt{x}}{2} dx = \frac{1}{2} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (\sqrt{x})^3 + C$$

(eller:  $\frac{1}{3} x \sqrt{x} + C$ )

$$\text{c) } \int 2^x dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + C$$

$$\text{d) } \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \text{ gir med } a = -1:$$

$$\int e^{-x} dx = \frac{1}{-1} e^{-x} + C = -e^{-x} + C$$

$$\text{e) } \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \text{ gir med } a = 2:$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx = \int (2x+1)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \frac{(2x+1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2} \frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{2x+1} + C$$

$$\text{f) } \int \frac{x^2-1}{x} dx = \int \left( \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} \right) dx = \int \left( x - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{2} x^2 - \ln|x| + C$$

## Oppgave 2

Regn ut de bestemte integralene:

$$\text{a) } \int_{-1}^2 (x^2 - x) dx \qquad \text{b) } \int_0^{\ln 2} e^{\frac{x}{5}} dx$$

c) Skriv opp kommandoen du ville brukt i GeoGebra CAS for å løse oppgave 2 b).

$$\text{a) } \int_{-1}^2 (x^2 - x) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \left( \frac{-1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$\text{b) } \int_0^{\ln 2} e^{\frac{x}{5}} dx = \int_0^{\ln 2} \left[ \frac{1}{\frac{1}{5}} e^{\frac{x}{5}} \right] = \int_0^{\ln 2} [5e^{\frac{x}{5}}] = 5e^{\ln 2 \cdot \frac{1}{5}} - 5e^0 = 5(e^{\ln 2})^{\frac{1}{5}} - 5 = 5 \cdot 2^{\frac{1}{5}} - 5 = 5(\sqrt[5]{2} - 1) \approx 0.743$$

c) **Integral[exp(x/5),0,ln(2)]** eller **Integral[e^(x/5),0,ln(2)]**  
(Husk Alt-e for å få Eulers tall  $e$  og ikke en vanlig  $e$ !)

### Oppgave 3

Gitt funksjonen  $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ .

a) Regn ut arealet avgrenset av  $f(x)$  og  $x$ -aksen.

b) Bestem  $k$  slik at  $\int_2^k f(x) dx = 0$

c) Skriv opp kommando(e) du ville brukt i GeoGebra CAS for å løse oppgave 3 b).

*Tegn alltid figur når du skal finne arealer med integrasjon, slik at du ser hvilke grenser som må brukes i integrasjonen og hva man må passe på når det gjelder fortegn:*

a) Skjæring  $x$ -akse:  $2x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$

$$\begin{aligned} \text{Areal} &= \left| \int_{-1}^3 f(x) dx \right| = \left| \int_{-1}^3 (2x^2 - 4x - 6) dx \right| = \left| \int_{-1}^3 \left[ \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x \right] \right| = \\ &= \left| \frac{2}{3}3^3 - 2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 - \left( \frac{2}{3}(-1) - 2 - 6(-1) \right) \right| = \left| -\frac{64}{3} \right| = \frac{64}{3} \approx 21.3 \end{aligned}$$

(Integralet er negativt, arealet skal være positivt.)

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_2^k (2x^2 - 4x - 6) dx &= 2 \int_2^k (x^2 - 2x - 3) dx = 2 \frac{k}{2} \left[ \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right] = \\ &= 2 \left( \frac{k^3}{3} - k^2 - 3k - \left( \frac{8}{3} - 4 - 6 \right) \right) = \frac{2}{3}k^3 - 2k^2 - 6k + \frac{44}{3} \end{aligned}$$

Vi får ligningen:

$$\frac{2}{3}k^3 - 2k^2 - 6k + \frac{44}{3} = 0 \Leftrightarrow 2k^3 - 6k^2 - 18k + 44 = 0$$

$k = 2$  er åpenbart en løsning, så polynomdivisjon gir

$$\begin{aligned} (k-2)(2k^2 - 2k - 22) &= 0 \Leftrightarrow \\ x = 2 \vee x &= \frac{1}{2}(1 - 3\sqrt{5}) \vee x = \frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{5}) \\ x = 2 \vee x &\approx -2.85 \vee x \approx 3.85 \end{aligned}$$

(Kan bruke GeoGebra til å finne dette, se c).)

c)

1	$f(x) := 2x^2 - 4x - 6$ ● $\rightarrow f(x) := 2x^2 - 4x - 6$
2	$f(x) = 0$ ○ Løs: $\{x = -1, x = 3\}$
3	Integral[ $f, 2, k$ ]=0 ○ NLøs: $\{k = -2.85, k = 2, k = 3.85\}$

(Linje 2 er bare for å finne integrasjonsgrensene i a) for å se hvordan grafen ligger.)

### Oppgave 4

Gitt funksjonen  $f(x) = x^2 \ln x$

a) Vis at  $f'(x) = x(2 \ln x + 1)$

b) Regn ut  $\int_1^e x(2 \ln x + 1) dx$

c) Skriv opp kommandoen(e) du ville brukt i GeoGebra CAS for å løse oppgave 4 b).

a) Produktregelen gir:

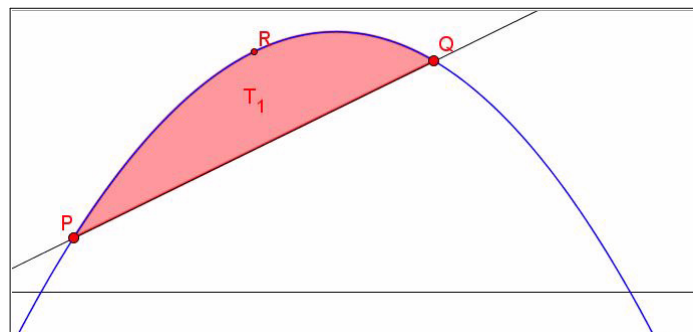
$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1) \quad QED$$

b) Fundamentalteoremet gir:

$$\int_1^e x(2 \ln x + 1) dx = \int_1^e [x^2 \ln x] = e^2 \ln e - \ln 1 = e^2 - 0 = e^2$$

c) **Integral[x(2 ln(x)+1),1,e]** (Husk Alt-e for Eulers tall  $e$ !)

### Oppgave 5

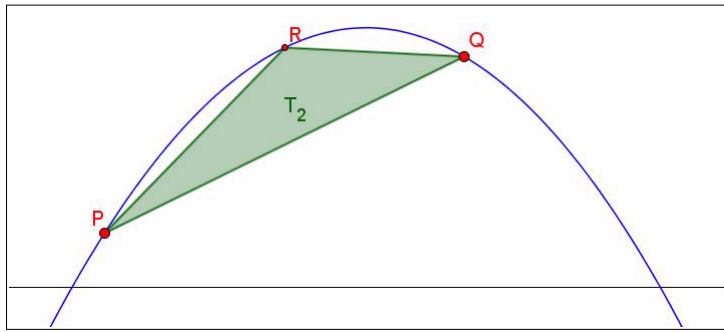


Figur 1

Figuren over viser en funksjon  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , der parameterene  $a$ ,  $b$  og  $c$  er slik at grafen krummer nedover og alle punktene  $P$ ,  $Q$  og  $R$  ligger over  $x$ -aksen.

Punktene  $P$ ,  $Q$  og  $R$  har  $x$ -koordinater på henholdsvis  $p$ ,  $q$  og  $r$ , og  $r = \frac{p+q}{2}$ , slik at  $R$  har en  $x$ -koordinat midt mellom  $x$ -koordinatene til  $P$  og  $Q$ .

a) Skriv ned hvordan du ville få GeoGebra CAS til å vise at arealet  $T_1$  i figur 1 blir  $\frac{a(p-q)^3}{6}$ .



Figur 2

b) Skriv ned hvordan du ville få GeoGebra CAS til å regne ut arealet  $T_2$  i figur 2.

c) Skriv ned hvordan du ville få GeoGebra CAS til å regne ut forholdet  $\frac{T_1}{T_2}$ .

a) Vi definerer først funksjonen og punktene ut fra oppgavens opplysninger:

1	$f(x) := a x^2 + b x + c$ → $f(x) := a x^2 + b x + c$
2	$P := (p, f(p))$ → $P := (p, a p^2 + b p + c)$
3	$Q := (q, f(q))$ → $Q := (q, a q^2 + b q + c)$
4	$r := (p+q)/2$ → $r := \frac{1}{2} (p + q)$
5	$R := (r, f(r))$ → $R := \left( \frac{p+q}{2}, \frac{a p^2 + 2 a p q + a q^2 + 2 b p + 2 b q + 4 c}{4} \right)$

Vi definerer en linje  $l_{pq}(x)$  som funksjon av  $x$ , finner arealet som integral og faktoriserer:

6	$l_{pq}(x) := \text{Linje}[P, Q]$ → $l_{pq}(x) := x (a p + a q + b) - a p q + c$
7	$T_1 := \text{IntegralMellom}[f, l_{pq}, p, q]$ → $T_1 := \frac{1}{6} a p^3 - \frac{1}{2} a p^2 q + \frac{1}{2} a p q^2 - \frac{1}{6} a q^3$
8	Faktoriser[7] → $(p - q)^3 \cdot \frac{a}{6}$

b) Her trenger vi to linjer til;  $l_{pr}(x)$  og  $l_{rq}(x)$ , før vi regner ut arealet:

9	$L_{\{pr\}}(x) := \text{Linje}[P, R]$ $\rightarrow l_{pr}(x) := -\frac{1}{2} a p^2 + x \left( \frac{3}{2} a p + \frac{1}{2} a q + b \right) - \frac{1}{2} a p q + c$
10	$L_{\{rq\}}(x) := \text{Linje}[R, Q]$ $\rightarrow l_{rq}(x) := -\frac{1}{2} a q^2 + x \left( \frac{1}{2} a p + \frac{3}{2} a q + b \right) - \frac{1}{2} a p q + c$
11	$T_2 := \text{IntegralMellom}[L_{\{pr\}}, L_{\{pq\}}, p, r] + \text{IntegralMellom}[L_{\{rq\}}, L_{\{pq\}}, r, q]$ $\rightarrow T_2 := \frac{1}{8} a p^3 - \frac{1}{8} a q^3 + \frac{3}{8} a p q^2 - \frac{3}{8} a p^2 q$
12	Faktoriser[ $T_2$ ] $\rightarrow (p - q)^3 \cdot \frac{a}{8}$

c) Og til slutt forholdet  $\frac{T_1}{T_2}$ , som først ble funnet av Arkimedes:

13	$T_1/T_2$
<input type="radio"/>	$\rightarrow \frac{4}{3}$