

R2 - Integralregning

Løsningsskisser

Del 1 - Uten hjelpemidler (lommeregner ok)

Oppgave 1

Regn ut integralene:

$$\text{a) } \int xe^x dx \quad \text{b) } \int 4x \ln(x) dx \quad \text{c) } \int \frac{1}{x^2-x} dx \quad \text{d) } \int \frac{1}{e^x-1} dx$$

a) Delvis integrasjon, med $u' = e^x$ og $v = x$:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

b) Delvis med $v = \ln x$ og $u' = 4x$:

$$\begin{aligned} \int 4x \ln(x) dx &= 2x^2 \ln x - \int 2x^2 \frac{1}{x} dx = 2x^2 \ln x - \int 2x dx = \\ &2x^2 \ln x - x^2 + C = x^2(2 \ln x - 1) + C \end{aligned}$$

Eller skrive om og ta variabelskifte:

$$\begin{aligned} \int 4x \ln(x) dx &= \int (2x) \ln(x^2) dx = \int u' \ln(u) dx = \int \ln(u) du = u \ln u - u + C = \\ &x^2 \ln x^2 - x^2 + C = x^2 2 \ln x - x^2 + C = x^2(2 \ln x - 1) + C \end{aligned}$$

$$\text{(Husk regel: } \int \ln x dx = x \ln x - x + C)$$

c) Delbrøkoppspalting: $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$ gir: $1 = A(x-1) + Bx$ og:

$$A = -1, B = 1$$

$$\int \frac{1}{x^2-x} dx = \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x} dx = \ln|x-1| - \ln|x| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$$

d) Variabelskifte med: $u = e^x$ og $\frac{du}{dx} = e^x$, som gir: $dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}$

$$\int \frac{1}{e^x-1} dx = \int \frac{1}{u-1} \frac{du}{u} \text{ Her har vi } e^x \text{ som må bort, så vi bruker } u = e^x:$$

$$\int \frac{1}{u-1} \frac{du}{u} = \int \frac{1}{(u-1)u} du$$

Samme delbrøkoppspalting som i c) gir:

$$\int \frac{1}{u-1} du - \int \frac{1}{u} du = \ln\left|\frac{u-1}{u}\right| + C = \ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right| + C$$

Oppgave 2

Gitt funksjonen $f(x) = \sqrt{x+3}$.

a) Regn ut arealet avgrenset av $f(x)$ og koordinataksene.

b) Regn ut volumet av omdreiningslegemet som fremkommer ved å dreie grafen til $f(x)$ 360° om x -aksen fra $x = 0$ til $x = 5$.

a) Vi ser at $f(-3) = 0$ og at $f(0) = \sqrt{3}$. $f(x)$ er funksjonen \sqrt{x} forskjøvet 3 enheter til venstre.

$$\text{Arealet blir derfor: } \int_{-3}^0 \sqrt{x+3} dx = \int_{-3}^0 (x+3)^{\frac{1}{2}} dx = \left. \frac{2}{3} (x+3)^{\frac{3}{2}} \right|_{-3}^0 = \frac{2}{3} (3^{\frac{3}{2}}) - 0 = \frac{2}{3} \sqrt{3}^3 = \frac{2}{3} 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{b) Volumet: } \pi \int_0^5 f^2(x) dx = \pi \int_0^5 (x+3) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_0^5 = \pi \left(\frac{25}{2} + 15 - 0 \right) = \frac{55}{2} \pi \approx 86.4$$

Oppgave 3

Gitt funksjonen $f(x) = e^{2-\frac{1}{x}}$.

a) Vis at $f'(x) = e^2 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$.

b) Regn ut det bestemte integralet $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx$.

a) Kjernerregel:

$$f(x) = e^u, u = 2 - \frac{1}{x} \text{ gir:}$$

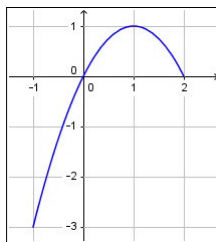
$$f'(x) = e^u \cdot \left(0 - \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = e^{2-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} = e^2 e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} = e^2 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \text{ QED}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f'(x)}{e^2} dx = \frac{1}{e^2} \int_{\frac{1}{2}}^1 f'(x) dx = \frac{1}{e^2} \left. \frac{1}{2} [f(x)] \right|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2e^2} (f(1) - f(\frac{1}{2})) = \\ &= \frac{1}{2e^2} (e^{2-\frac{1}{1}} - e^{2-\frac{1}{\frac{1}{2}}}) = \frac{1}{2e^2} (e^1 - e^0) = \frac{e-1}{2e^2} \end{aligned}$$

Oppgave 4

Figuren viser grafen til en funksjon $g(x)$ med definisjonsmengde $D_g = [-1, 2]$.

Om en funksjon $f(x)$ vet vi at $g'(x) = f(x)$.



a) Finn integralet $\int_{-1}^2 f(x) dx$

b) Bestem a og b , innenfor D_g , slik at integralet $\int_a^b f(x) dx$ blir størst mulig.

c) Finn arealet avgrenset av $f(x)$, x -aksen og linjene $x = -1$ og $x = 2$.

a) Fundamentalteoremet gir: $\int f(x)dx = \int g'(x)dx = g(x) + C$

$$\int_{-1}^2 f(x)dx = g(2) - g(-1) = 0 - (-3) = 3$$

b) $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$ blir størst når $b = 1$ og $a = -1$

$$(g(1) - g(-1) = 1 - (-3) = 4)$$

c) Vi ser at $g'(1) = f(1) = 0$, da dette er et ekstremalpunkt for $g(x)$.

Da $g'(x) > 0$ for $x < 1$ og $g'(x) < 0$ for $x > 1$ vet vi at $f(x)$ er over x -aksen for $x < 1$, skjærer x -aksen for $x = 1$ og er under x -aksen for $x > 1$.

Det avgrensede arealet må derfor regnes ut som:

$$A = \int_{-1}^1 f(x)dx + \left| \int_1^2 f(x)dx \right| = g(1) - g(-1) + |g(2) - g(1)| = 1 - (-3) + |0 - 1| = 4 + 1 = 5$$

Del 2 - Med hjelpemidler (pc og bok)

Oppgave 5

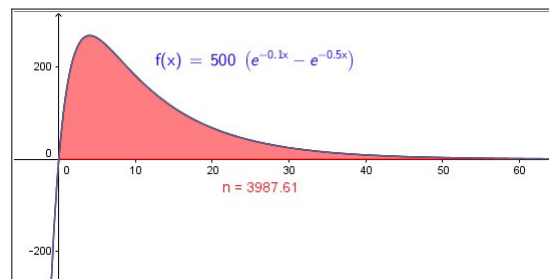
Funksjonen $f(x) = 500(e^{-0.1x} - e^{-0.5x})$ [syke/døgn], $x \in [0, 60]$ [døgn] viser hvordan en influensaepidemi utviklet seg i Lilleby i løpet av 60 døgn.

$f(x)$ er antall personer som blir smittet og syke per døgn, som funksjon av antall døgn etter epidemiens start. Hvor mange blir syke i disse 60 døgnene?

I numerisk/grafisk del av GeoGebra:

f(x):=500 (exp(-0.1 x)-exp(-0.5 x))
n:=Integral[f,0,60]

gir antall syke: $n \approx 3990$



Tilsvarende i CAS:

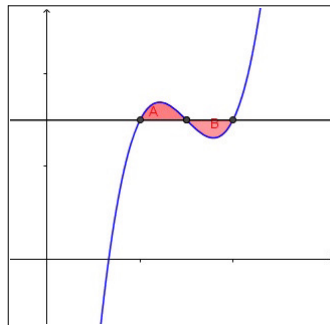
1	$f(x) = 500 (\exp(-0.1 x) - \exp(-0.5 x))$
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow f(x) := 500 (-e^{-\frac{1}{10}x} + e^{-\frac{1}{2}x})$
2	$n := \text{Integral}[f, x, 0, 60]$
<input type="radio"/>	$\rightarrow n := \frac{4000 (e^6)^5 - 5000 (e^6)^4 + 1000}{(e^6)^5}$
3	$(4000(e^6)^5 - 5000(e^6)^4 + 1000) / (e^6)^5$
<input type="radio"/>	≈ 3987.61

(Tar litt lengre tid å gjøre dette manuelt, så man bør derfor ikke bruke tid på dette på eksamen, men for eksemplets skyld:

$$n = 500 \int_0^{60} (e^{-\frac{x}{10}} - e^{-\frac{x}{2}}) dx = 500 \left[\frac{e^{-\frac{x}{10}}}{-\frac{1}{10}} - \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_0^{60} = 500 \left[2e^{-\frac{x}{2}} - 10e^{-\frac{x}{10}} \right]_0^{60} = 500(2e^{-30} - 10e^{-6} - (2e^0 - 10e^0)) = 500(2e^{-30} - 10e^{-6} - 2 + 10) \approx 3990$$

Oppgave 6

Vi har en tredjegradsfunksjon, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, hvor vi forutsetter at en vannrett linje l gjennom vendepunktet skjærer grafen til $f(x)$ i to andre punkter. Da vil linjen l og funksjonen $f(x)$ avgrense to arealer, omtrent slik:



Bruk CAS til å vise at disse to arealene er like.

1	$f(x) := a x^3 + b x^2 + c x + d$ → $f(x) := a x^3 + b x^2 + c x + d$
2	Vendepunkt når $f'(x)=0$:
3	$f'(x)=0$ Løs: $\left\{ x = -\frac{b}{3a} \right\}$
4	$x_v := \text{HøyreSide}[\$3,1]$ → $x_v := -\frac{b}{3a}$
5	$l(x)$: Konstant lik y-verdien til vendepunktet, det vil si $f(x_v)$:
6	$l(x) = f(x_v)$ → $l(x) := \frac{2 b^3 + 27 a^2 d - 9 a b c}{27 a^2}$

7	Finner skjæringspunktene (x_p allerede kjent):
8	$f(x)=l(x)$ Løs: $\left\{ x = \frac{\sqrt{3} \sqrt{-3 a c + b^2} a - a b}{3 a^2}, x = \frac{-\sqrt{3} \sqrt{-3 a c + b^2} a - a b}{3 a^2}, x = -\frac{b}{3 a} \right\}$
9	Definerer x-koordinatene til de andre skjæringspunktene:
10	$x_1 := \text{HøyreSide}[\$8,2]$ → $x_1 := \frac{-\sqrt{3} \sqrt{-3 a c + b^2} a - a b}{3 a^2}$
11	$x_2 := \text{HøyreSide}[\$8,1]$ → $x_2 := \frac{\sqrt{3} \sqrt{-3 a c + b^2} a - a b}{3 a^2}$

12	Finner de to arealene (A og B):
13	$A := \text{IntegralMellom}[f, l, x_1, x_v]$ → $A := \frac{9 a^2 c^2 - 6 a b^2 c + b^4}{36 a^3}$
14	$B := \text{IntegralMellom}[l, f, x_v, x_2]$ → $B := \frac{9 a^2 c^2 - 6 a b^2 c + b^4}{36 a^3}$
15): Ser at $A=B$