R2 - Trigonometri - 03.01.13

Løsningsskisser

I

Gjør om vinklene til absolutt vinkelmål (radianer): a) 72° b) -115°

a) $72^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}72^\circ = \frac{2\pi}{5}$ b) $-115^\circ = -\frac{\pi}{180^\circ}115^\circ = -\frac{23\pi}{36}$

II

Gjør om vinklene til grader: a) $\frac{\pi}{8}$ b) -2

a) $\frac{\pi}{8} = \frac{180^\circ}{\pi}\frac{\pi}{8} = 22.5^\circ$ b) $-2 = -\frac{180^\circ}{\pi}2 = \frac{360^\circ}{\pi} \approx 115^\circ$

III

Løs ligningene ved regning:

a) $4\cos x + 3 = 0, \quad x \in [0^\circ, 360^\circ\rangle$

$\cos x = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 138.6^\circ + k360^\circ \vee x = 360^\circ - 138.6^\circ + k360^\circ \Leftrightarrow$
$x = 138.6^\circ + k360^\circ \vee x = 221.4^\circ + k360^\circ$
$L = \{139^\circ, 221^\circ\}$

b) $2\cos^2 x + 7\cos x - 4 = 0, \quad x \in [0^\circ, 360^\circ\rangle$

$2u^2 + 7u - 4 = 0, \quad u = \cos x \Leftrightarrow u = -4 \vee u = \frac{1}{2}$
$\cos x = -4$ (Umulig) $\vee \cos x = \frac{1}{2}$
$x = 60^\circ + k360^\circ \vee x = 360^\circ - 60^\circ + k360^\circ$
$L = \{60^\circ, 300^\circ\}$

c) $2\sin^2 x - 7\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 0, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$

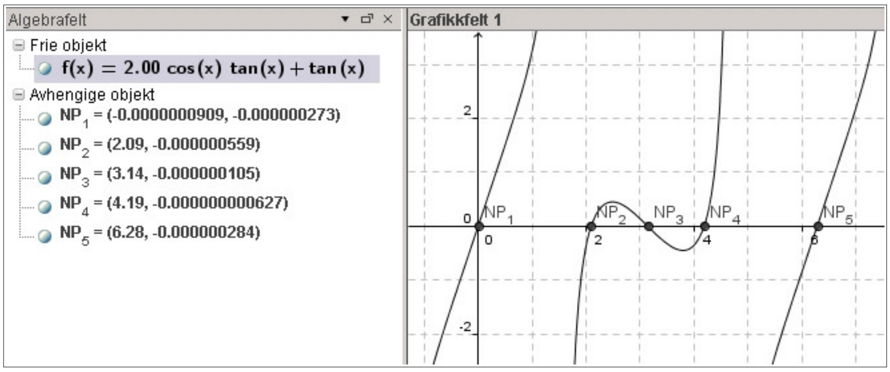
$\cos x = 0$ gir ingen løsning.
$\cos x \neq 0$ gir, etter divisjon med $\cos^2 x$:
$2\tan^2 x - 7\tan x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2u^2 - 7u - 4 = 0, \quad u = \tan x$
$u = -\frac{1}{2} \vee u = 4$
$\tan x = -\frac{1}{2} \vee \tan x = 4$
$x = -0.464 + k\pi \vee x = 1.33 + k\pi$
$L = \{1.33, 2.68, 4.47, 5.82\}$

d) $2\cos x\tan x + \tan x = 0, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$

Faktoriserer: $\tan x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$
$x = 0 + k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \vee x = 2\pi - \frac{2\pi}{3} + k2\pi$
$x = 0 + k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi$

$L = \{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}\} \qquad (\approx \{0, 2.09, 3.14, 4.19\})$

Illustrerer hvordan vi kan sjekke svar med GeoGebra:
Kommandoene:
f(x)=2*cos(x)*tan(x)+tan(x)
NP=NullpunktIntervall[f,-1,7]
gir oss:



(Hvis Nullpunktintervall[...] ikke fungerer ordentlig, kan man finne ett og ett nullpunkt med eksempelvis **NP_2= Nullpunkt[f,1,3]**)

IV

Gitt funksjonen: $f(x) = 3 - \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2}x) - \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)$
a) Skriv om funksjonen til formen $L + A\sin(kx - \varphi)$ og finn amplituden, likevektslinjen, perioden og faseforskyvningen.

$f(x) = 3 + (-\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2}x) - \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{2}x))$
$f(x) = 3 + (\sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2}\sin(\frac{\pi}{2}x + \varphi)), \qquad \tan\varphi = 1, \varphi \in 3$ Kvadrant
$f(x) = 3 + 2\sin(\frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi}{4})$

(Kan også gjøre:
$f(x) = 3 - (\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2}x) + \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)) \ = 3 - 2\sin(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4})$
som er samme funksjon.)

b) Finn funksjonens nullpunkter ved regning.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi}{4}) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow$Umulig, ingen nullpunkter.

c) Finn funksjonens ektremalpunkter og vendepunkter ved regning.

Formen $L + A\sin(kx - \varphi)$ gir oss ekstremal- og vendepunkter uten derivasjon, nok å se på $\sin(\ldots)$ - delen av uttrykket:

Toppunkter:
$f_{\max} = 3 + 2 \cdot 1 = 5 \qquad$ når $\qquad \sin(\frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow$
$\frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + n2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} + n4$
): $\quad TP_1 = (\frac{5}{2}, 5), \qquad TP_2 = (\frac{13}{2}, 5)$
Dessuten endepunktet: $(0, f(0)) \ = (0, 2 - \sqrt{2}) \approx (0, 0.586)$

Bunnpunkter:

$f_{\min} = 3 + 2(-1) = 1$ når $\sin(\frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi}{4}) = -1 \Leftrightarrow$
$\frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + n2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + n4$
): $BP_1 = (\frac{1}{2}, 1)$, $BP_2 = (\frac{9}{2}, 1)$

Vendepunkter:
$f_{vp} = 3 + 2 \cdot 0 = 3$ (Krysninger med likevektslinje.)
når
$\sin(\frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi}{4} = 0 + n2\pi \Leftrightarrow$
$x = -\frac{5}{2} + n4$
): $VP_1 = (\frac{3}{2}, 3)$, $VP_2 = (\frac{7}{2}, 3)$, $VP_3 = (\frac{11}{2}, 3)$

V

En funksjon på formen $f(x) = L + A\sin(kx + \varphi)$ har et toppunkt i $(2, 5)$.
Det første bunnpunktet etter dette toppunktet ligger i $(4, 1)$.
Finn funksjonsuttrykket til $f(x)$.

Amplitude: $A = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$
Likevektslinje: $L = \frac{f_{\max} + f_{\min}}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$

Periode:
Avstand mellom to ekstremalpunkter er halve perioden,
så:
$\frac{P}{2} = 4 - 2 \Leftrightarrow P = 4 \Rightarrow$
$k = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Så langt har vi: $f(x) = 3 + 2\sin(\frac{\pi}{2}x + \varphi)$

Vi bestemmer faseforskyvningen ved å bruke det første punktet,
toppunktet:
$f(2) = 5 \Leftrightarrow 3 + 2\sin(\frac{\pi}{2}2 + \varphi) = 5 \Leftrightarrow \sin(\pi + \varphi) = 1 \Leftrightarrow$
$\pi + \varphi = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$
Velger den enkleste verdien når $k = 0$, og får da:

$$f(x) = 3 + 2\sin(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2})$$

(eller $f(x) = 3 + 2\sin(\frac{\pi}{2}(x - 1))$)