

R2 - Trigonometri - 10.11.14

Selv om vi ikke brukte GeoGebra på prøven, har jeg antydnet hvordan vi kan bruke GeoGebra til å kontrollere svar. Gjør det til en vane å kontrollere svar med GeoGebra når dere regner oppgaver hjemme, så får dere trent på både regning og GeoGebra-bruk samtidig!

I

a) Gjør om vinkelen $x = 12^\circ$ til absolutt vinkelmål (radianer).

b) Gjør om vinkelen $x = -3$ [rad] til grader.

$$\text{a) } \pi \frac{12^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{15} \approx 0.209$$

$$\text{b) } 180^\circ \frac{-3}{\pi} \approx -172^\circ$$

II

Løs ligningene ved regning:

$$\text{a) } \sqrt{3} \tan(x) - 1 = 0, \quad x \in [0, 2\pi)$$

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad): \quad L = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right\}$$

$$\text{b) } \sqrt{3} \tan(3x + 1) - 1 = 0, \quad x \in [0, 2\pi)$$

$$\begin{aligned} \tan(3x + 1) = \frac{1}{\sqrt{3}} &\Leftrightarrow (3x + 1) = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi-6}{6} + k\pi \Leftrightarrow \\ x = \frac{\pi-6}{18} + k\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$): \quad L = \left\{ \frac{7\pi-6}{18}, \frac{13\pi-6}{18}, \frac{19\pi-6}{18}, \frac{25\pi-6}{18}, \frac{31\pi-6}{18}, \frac{37\pi-6}{18} \right\} \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$\text{Eller: } L \approx \{0.888, 1.94, 2.98, 4.03, 5.08, 6.12\}$$

Kontroll i GeoGebra:

$$f(x) := \sqrt{3} \tan(3x + 1) - 1$$

Graftegnerdel, numerisk:

NullpunktIntervall[f,0,7] gir A=(0.888,0), B=(1.94,0), ...

CAS, eksakt:

$$f(x)=0 \text{ og } \boxed{x=} \text{ gir: } \left\{ x = \frac{6k\pi + \pi - 6}{18} \right\}$$

$$f(x)=0 \text{ og } \boxed{x\approx} \text{ gir: } \{8.22\} \text{ som tilsvarer } k=8 \text{ i uttrykket over...}$$

$$\text{c) } 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0, \quad x \in [0, 2\pi)$$

$$\begin{aligned} 2u^2 + 3u - 2 &= 0, \quad u = \sin x \\ u = -2 \vee u = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \sin x = -2 \text{ (Umulig)} \vee \sin x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + l2\pi & \\): \quad L = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\} \end{aligned}$$

Kontroll i GeoGebra CAS:

$$f(x) := 2 (\sin(x))^2 + 3 \sin(x) - 2$$

$$f(x) = 0 \text{ og } \boxed{x=} \text{ gir: } \left\{ x = 2k\pi + \frac{1}{6}\pi, x = 2k\pi + \frac{5}{6}\pi \right\}$$

$$d) \cos x \tan x - \cos x = 0, \quad x \in [0, 2\pi)$$

Prøv alltid faktorisering først! Ikke gjør ting vanskeligere enn de er ved å gå rett på alle mulige avanserte teknikker, før man har prøvd faktorisering!

$$\cos x (\tan x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \tan x = 1 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$): \quad L = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

Kontroll med GeoGebra CAS:

$$f(x) := \cos(x) \tan(x) - \cos(x)$$

$$f(x) = 0 \text{ og } \boxed{x=} \text{ gir: } \left\{ x = 2k\pi + \frac{1}{4}\pi, x = 2k\pi - \frac{3}{4}\pi \right\}$$

III

Gitt funksjonen $f(x) = 2 + \sin(3x) + \sqrt{3} \cos(3x)$, $x \in [0, 2\pi)$

a) Skriv funksjonen på formen $f(x) = L + A \sin(cx + \varphi)$.

b) Finn funksjonens nullpunkter, ekstremalpunkter og vendepunkter.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sin(3x) + \sqrt{3} \cos(3x) \\ &= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \sin(3x + \varphi), \tan \varphi = \sqrt{3}, \varphi \in 1 \text{ Kvadrant} \\ &= 2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$): \quad f(x) = 2 + 2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 2 + 2 \sin\left(3\left(x + \frac{\pi}{9}\right)\right)$$

b)

Nullpunkter:

$$2 + 2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{7\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3}$$

$$): \quad \left(\frac{7\pi}{18}, 0\right), \left(\frac{19\pi}{18}, 0\right), \left(\frac{31\pi}{18}, 0\right) \text{ (Eller: } (1.22, 0), (3.32, 0), (5.41, 0) \text{)}$$

$$\text{Ekstremalpunkter når: } \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1$$

$$\text{Topp-punkter: } 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3}$$

$$): \quad \left(\frac{\pi}{18}, 4\right), \left(\frac{13\pi}{18}, 4\right), \left(\frac{25\pi}{18}, 4\right) \text{ (Eller: } (0.175, 4), (2.27, 4), (4.36, 4) \text{)}$$

$$\text{Bunn-punkter når: } 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3}$$

$$): \quad (0, 2 + \sqrt{3}), \left(\frac{7\pi}{18}, 0\right), \left(\frac{19\pi}{18}, 0\right), \left(\frac{31\pi}{18}, 0\right)$$

$$\text{(Eller: } (0, 3.73), (1.22, 0), (3.32, 0), (5.41, 0) \text{)}$$

Som null-punkter bortsett fra *endepunktet* $(0, 2 + \sqrt{3})$! Ikke glem endepunkter!

Vendepunkter når: $\sin(3x + \frac{\pi}{3}) = 0 \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{3} = 0 + k\pi \Leftrightarrow$
 $x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}$

): $(\frac{2\pi}{9}, 2), (\frac{5\pi}{9}, 2), (\frac{8\pi}{9}, 2), (\frac{11\pi}{9}, 2), (\frac{14\pi}{9}, 2), (\frac{17\pi}{9}, 2)$

(Eller: $(0.698, 2), (1.75, 2), (2.79, 2), (3.84, 2), (4.89, 2), (5.93, 2)$)

Kontroll med GeoGebra:

$f(x) = 2 + \sin(3x) + \sqrt{3} \cos(3x)$

Graftegneren viser hvor mange null-, ekstremal- og vendepunkter man kan vente seg.

$f(x)=0, f'(x)=0, f''(x)=0$ og $x=$ eller $x\approx$ gir

x-koordinatene til null-, ekstremal- og vendepunkter.

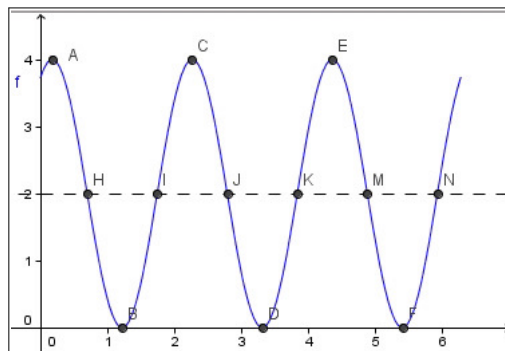
Eller numerisk:

Ekstremalpunkt[f,0,7]

$g(x)=2$ (Likevektslinje)

Skjæring[f,g,0,7] (Greieste måte å finne vendepunkt på.)

NullpunktIntervall[f,0,7] fungerer ikke, da tangeringspunktene ikke regnes som skjæringspunkter i GeoGebra.
(Noen land definerer nullpunkt annerledes...)



IV

Vi har en funksjon $f(x) = L + A \sin(cx + \varphi)$, $x \in [0, 16]$

Laveste verdi av $f(x)$ i definisjonsmengden er 5.

$f(x)$ har ett topp-punkt $(11, 13)$ i definisjonsmengden.

Funksjonen har periode $T = 16$.

Bestem funksjonsuttrykket til $f(x)$.

Likevektslinje: $L = \frac{\max + \min}{2} = \frac{13 + 5}{2} = 9$

Amplitude: $A = \frac{\max - \min}{2} = \frac{13 - 5}{2} = 4$

Periode: $T = 16 \Rightarrow c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$

$f(x)$ krysser likevektslinje på vei oppover $\frac{T}{4}$ før første topp-punkt $(11, 13)$,

det vil si $x = 11 - \frac{16}{4} = 7$

altså har vi faseforskyving $\phi = -7$ og $\varphi = c\phi = -\frac{7\pi}{8}$

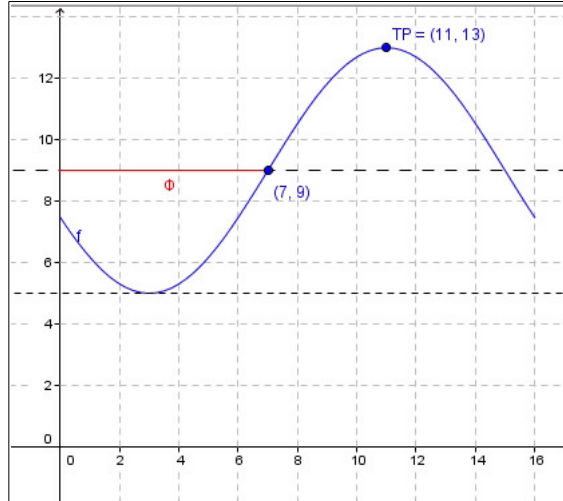
): $f(x) = 9 + 4 \sin(\frac{\pi}{8}(x - 7)) = 9 + 4 \sin(\frac{\pi}{8}x - \frac{7\pi}{8})$

(Eller: $f(x) = 9 + 4 \sin(0.393x - 2.75)$)

Kontroll i GeoGebra:

$f(x) := 9 + 4 \sin(\pi/8 (x-7))$

Slå på rutenett i graftegneren, så ser vi at det stemmer med oppgavens opplysninger:



V

Vinkelen x ligger i 3dje kvadrant og $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Finn eksakte verdier for $\sin x$, $\tan x$ og $\cos 2x$.

$$\begin{aligned} \sin x &= \pm \sqrt{1 - \cos^2 x} \quad (\text{Positiv mulighet forkastes.}) \\ &= -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$$

(Kan også gjøres ved å tegne inn en rettvinklet trekant med sidene 1 , $\sqrt{3}$ og 2 og vinklene 30° , 60° og 90° i 3dje kvadrant og plukke ut verdiene direkte fra figuren.)

