

R2 - Trigonometri - 17.11.2016

Del I - Uten andre hjelpemidler enn lommeregner

Oppgave 1

Gjør om vinklene til radianer: a) 18° b) 33° (Regn eksakt!)

$$\text{a) } 18^\circ = \pi \frac{18^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{10} \quad \text{b) } 33^\circ = \pi \frac{33^\circ}{180^\circ} = \frac{11\pi}{60}$$

Oppgave 2

Gjør om vinklene til grader: a) $\frac{\pi}{16}$ b) -9 (Regn eksakt!)

$$\text{a) } \frac{\pi}{16} = \frac{180^\circ \pi}{\pi 16} = \frac{180^\circ}{16} = \frac{45^\circ}{4} \quad (11.25^\circ)$$

$$\text{b) } -9 = \frac{180^\circ(-9)}{\pi} = -\frac{1620^\circ}{\pi} \quad (\approx -516^\circ)$$

Oppgave 3

Løs ligningene ved regning, regn eksakt så langt det går:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 2 \cos x - \sqrt{2} = 0, \quad x \in [0, 2\pi) & \text{b) } 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0, \quad x \in [0, 2\pi) \\ \text{c) } \tan x \cos x - \cos x = 0, \quad x \in [0, 2\pi) & \text{d) } \cos^2 x + 3 \sin x \cos x + 1 = 0, \quad x \in [0, 2\pi) \end{array}$$

$$\text{a) } 2 \cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee x = 2\pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$L = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

$$\text{b) } 2u^2 + u - 1 = 0, u = \cos x \Leftrightarrow u = -1 \vee u = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = -1 \vee \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ x = \pi + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = 2\pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$L = \left\{ \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

$$\text{c) } \tan x \cos x - \cos x = 0, \quad \cos x \neq 0 \quad (\tan x \text{ ikke definert når } \cos x = 0 !)$$

$$\cos x (\tan x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ (Forkastes!)} \vee \tan x = 1$$

$$\text{(Alternativt: } \frac{\sin x}{\cos x} \cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1)$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$L = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$$

Viktig å skille mellom:

Forutsetning som gjelder i utgangspunktet. (Som i denne oppgaven.)

Forutsetning vi må ta i en omforming. (Som i neste oppgave.)

$$\text{d) } \cos^2 x + 3 \sin x \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x + 3 \sin x \cos x + (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow \\ \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$$

$$\cos x \neq 0 : \quad (\cos x = 0 \text{ gir ingen løsning})$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3 \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} + 2 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x + 3 \tan x + 2 = 0 \Leftrightarrow \\ u^2 + 3u + 2 = 0, u = \tan x \Leftrightarrow \tan x = -2 \vee \tan x = -1 \Leftrightarrow \\ x \approx 2.03 + k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

$$L = \left\{ 2.03, \frac{3\pi}{4}, 5.17, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

Oppgave 4

En funksjon på formen $f(x) = L + A \sin(cx + \varphi)$ har et toppunkt i $(1, 3)$.
Det første bunnpunktet etter toppunktet ligger i $(5, -1)$.

a) Finn funksjonsuttrykket til $f(x)$.

b) Finn nullpunktene til $f(x)$ i intervallet $[0, 4]$.

$$\text{a) Likevektslinje: } L = \frac{\max + \min}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1 \\ \text{Amplitude: } A = \frac{\max - \min}{2} = \frac{3 - (-1)}{2} = 2$$

Periode/bølgelengde:

Avstand mellom toppunkt og bunnpunkt er $\frac{\lambda}{2}$:

$$\frac{\lambda}{2} = 5 - 1 \Leftrightarrow \lambda = 8 \\ c = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

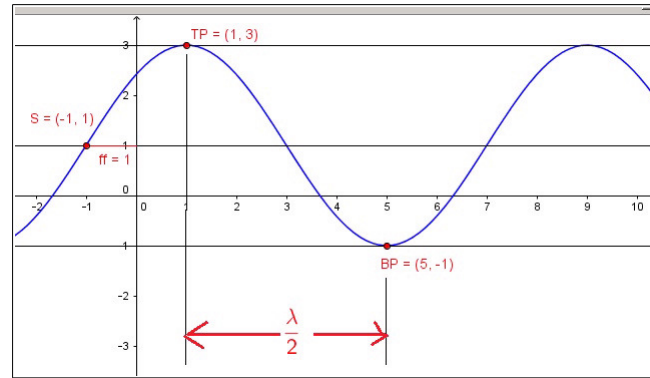
$$\text{): } f(x) = 1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}x + \varphi\right)$$

Første skjæringspunkt med likevektslinjen ligger en kvart bølgelengde før toppunktet i $(1, 3)$: $x = 1 - \frac{\lambda}{4} = 1 - \frac{8}{4} = -1$

Faseforskyvningen er derfor 1 til venstre, slik at faseforskyvningen blir $\varphi = 1$, som gir oss:

$$f(x) = 1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}(x + 1)\right) = 1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4}\right)$$

(Alternativt kan vi tenke oss faseforskyvning 7 enheter mot høyre, og får i så fall: $f(x) = 1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}(x - 7)\right) = 1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{7\pi}{4}\right)$)



$$\begin{aligned} \text{b) Nullpunkt for: } 1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right) &= 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \frac{\pi}{4}(x+1) &= \frac{7\pi}{6} + k2\pi \vee \frac{\pi}{4}(x+1) = \frac{11\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow \\ x &= \frac{11}{3} + k2\pi \vee x = \frac{19}{3} + k2\pi \end{aligned}$$

); Nullpunkt i $[0, 4]$ er $\frac{11}{3} \approx 3.67$

Oppgave 5

Vinkelen x ligger i 3dje kvadrant og $\tan x = \frac{4}{3}$.

a) Vis at $\sin x = -\frac{4}{5}$. b) Finn eksakte verdier for $\cos x$, $\tan x$ og $\tan(2x)$.

a) Vi kan lage en trekant med kateter lik 3 og 4.

Phytogoras gir da hypotenus: $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Ut fra trekanten og med fortegnskorrigering for 3dje kvadrant får vi:

$$\sin x = -\frac{4}{5}$$

$$\text{Har også formelen: } \sin x = \pm \frac{\tan x}{\sqrt{\tan^2 x + 1}} = \pm \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1}} = -\frac{4}{5}$$

(Forkaster positivt fortegn pga. plassering i kvadrant 3.)

b) $\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$ (Forkaster + i tredje kvadrant.)

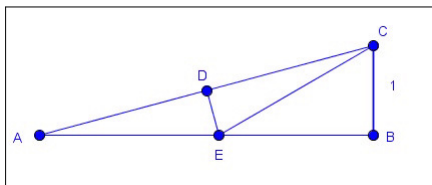
$\tan x$ allerede regnet ut, trykkfeil...

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \cdot \frac{4}{3}}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = -\frac{24}{7}$$

Oppgave 6

Gitt trekanten ABC , der $\angle A = 15^\circ$, $\angle B = 90^\circ$ og $BC = 1$.

I tillegg er: $\angle BEC = 30^\circ$ og $\angle ADE = 90^\circ$



a) Forklar hvorfor $AE = EC = 2$.

b) Bruk trekanten til å vise at $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$.
 (Hint: Du trenger: $4 \pm 2\sqrt{3} = 3 \pm 2\sqrt{3} + 1 = \sqrt{3}^2 \pm 2\sqrt{3} + 1^2 = (\sqrt{3} \pm 1)^2$)

- a) $\angle BCE = 60^\circ$ (Vinkelsum 180° i $\triangle EBC$)
 $\angle BCD = 75^\circ$ (Vinkelsum 180° i $\triangle ABC$)
 $\angle ECD = \angle BCD - \angle BCE = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$
 Som igjen er lik vinkel A!

$\triangle AED = \triangle CED$:
 -DE felles side
 -Begge rettvinklede da $\angle ADE = 90^\circ$
 - $\angle ECD = \angle A$

$$\sin \angle BEC = \frac{BC}{EC} \Rightarrow EC = \frac{BC}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Da $\triangle AED = \triangle CED$, må $AE = EC$

): $AE = EC = 2$ *QED*

b) $\cos \angle BEC = \frac{BE}{EC} \Rightarrow BE = EC \cos \angle BEC = 2 \cos 30^\circ = \sqrt{3}$

$$AB = AE + EB = 2 + \sqrt{3}$$

Pythagoras gir:

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 4\sqrt{3} + 3 + 1} = \\ &= \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{2(4 + 2\sqrt{3})} = \quad (\text{For å benytte hintet i oppgaven!}) \\ &= \sqrt{2(\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{1(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}(3-1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \\ &= \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) \quad \text{QED} \end{aligned}$$

Del II - Med hjelpemidler

Oppgave 7

Temperaturen et sted i Norge varierte gjennom et døgn som en sinusfunksjon

$$T(t) = L + A \sin(ct + \varphi) \quad [^\circ\text{C}], \quad t \in [0, 24] \quad [\text{timer}]$$

Temperaturen kl. 24:00 ($t = 0$) var 18° . Utover natten sank temperaturen til minimumstemperaturen 10.8° .

Maksimumstemperaturen dette døgnet var 19.2° .

- a) Finn et uttrykk for funksjonen $T(t)$.
 b) Finn ut på hvilke tidspunkter vi hadde minimums- og maksimumstemperaturer.

a) $L = \frac{\max + \min}{2} = \frac{19.2 + 10.8}{2} = 15.0$

$$A = \frac{\max - \min}{2} = \frac{19.2 - 10.8}{2} = 4.20$$

Periode $T = 24$ [timer] (Indirekte gitt i oppgaven, kan ikke være noe annet...)

$$c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12} = 0.262$$

Så langt: $T(t) = 15.0 + 4.20 \sin(0.262t + \varphi)$

Vinkelen φ finner vi ved å bruke betingelsen: $T(0) = 18$

$$15.0 + 4.20 \sin(0.262 \cdot 0 + \varphi) = 18 \Leftrightarrow$$

$$\sin(\varphi) = 0.71429$$

$$\varphi = 0.796 + k2\pi \vee \varphi = \pi - 0.796 = 2.35 + k2\pi$$

(Inntasting av $\sin(\varphi) = 0.71429$ og $\boxed{x^{-1}}$ i CAS gir $\{\varphi = 0.796, \varphi = 2.35\}$)

Ved å tegne grafen ser vi at vi må bruke $\varphi = 2.35$ for å få temperaturen til å synke utover natten:

$$T(t) = 15.0 + 4.2 \sin(0.262t + 2.35)$$

(Alternativt kunne vi brukt $15.0 - 4.20 \sin(\pi - (0.262t + 2.35)) =$

$$15.0 - 4.20 \sin(-0.262t + 0.796), \text{ men}$$

vi liker å ha positivt fortegn både foran amplituden 4.20 og t -leddet 0.262t...)

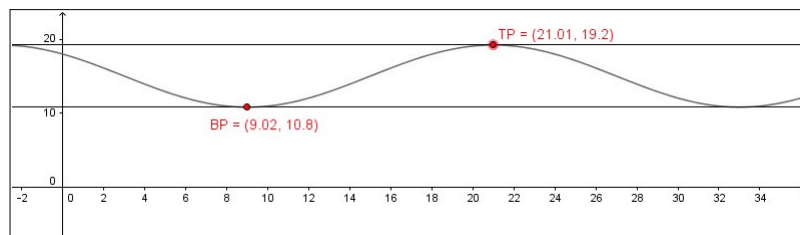
b) Ekstremalpunkter når $0.262t + 2.35 = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow$

$$t = \frac{\frac{\pi}{2} - 2.35}{0.262} + k \frac{\pi}{0.262} = -2.97 + k12$$

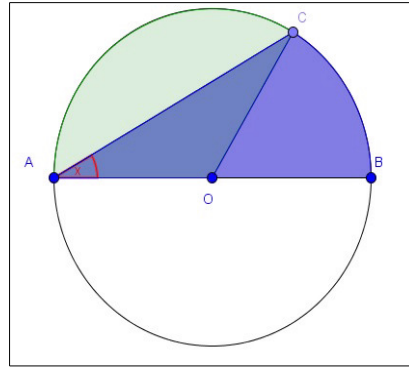
Bunnpunkt for $t = -2.97 + 12 = 9.03$): ca. kl. 09:02

Toppunkt for $t = -2.97 + 2 \cdot 12 = 21.03$):ca. kl. 21:02

Kan også bruke kommandoen **Ekstremalpunkt[T,0,24]** i grafisk del av GGB for å finne topp- og bunnpunkter.



Oppgave 8



Figuren over viser en sirkel med diameter AB og radius r .

Et punkt C flytter seg på sirkelen avhengig av vinkelen $x = \angle OAC$ som er uavhengig variabel.

Det markerte grønne området er et sirkelsegment S .

Det markerte blå området er summen av en trekant AOC og en sirkelsektor med bue BC .

a) Forklar og vis at sirkelsegmentet S har arealet

$$S(x) = r^2\left(\frac{\pi}{2} - x - \sin x \cos x\right), \quad \text{der } x \in [0, \pi).$$

b) Bestem x slik at det grønne sirkelsegmentet S blir like stort som det blå arealet.

a) Vinkelsummen i $\triangle AOC$ gir $v = \angle AOC = \pi - 2x$

Arealet av sirkelsektoren AOC :

$$S_1 = \frac{br}{2} = \frac{(vr)r}{2} = \frac{r^2}{2}v = \frac{r^2}{2}(\pi - 2x) = r^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Arealet av trekant $\triangle AOC$:

$$T = \frac{gh}{2} = \frac{AC \cdot h}{2} = \frac{2AO \cos x \cdot AO \sin x}{2} = AO^2 \sin x \cos x = r^2 \sin x \cos x$$

$$S(x) = S_1 - T = r^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - r^2 \sin x \cos x = r^2\left(\frac{\pi}{2} - x - \sin x \cos x\right) \quad \text{QED}$$

b) I CAS:

$$S(x) = r^2(\pi/2 - x - \sin(x) \cos(x))$$

$$S(x) = \pi r^2/4 \quad (\text{Hvis grønn og blå like store er de en fjerdedel av en sirkel!})$$

$$\boxed{x=}$$
 gir da: **Løs: {x=0.416, x=2.00 k₂ π + π }**

$$x \in [0, \pi) \text{ krever at løsningen blir } x = 0.416 \quad (\text{ca. } 24^\circ)$$

$$\begin{aligned} (\text{Litt mer tungvindt: } S = T + \text{sektor } BOC &\Leftrightarrow \\ r^2\left(\frac{\pi}{2} - x - \sin x \cos x\right) &= r^2 \sin x \cos x + \frac{(2x)r \cdot r}{2} \Leftrightarrow \\ \frac{\pi}{2} - x - \sin x \cos x &= \sin x \cos x + x \Leftrightarrow \\ x + \sin x \cos x &= \frac{\pi}{4} \quad \text{som løses i CAS} \end{aligned}$$

Dette er samme ligning som kommer ut av den første løsningen:

$$\begin{aligned} r^2\left(\frac{\pi}{2} - x - \sin x \cos x\right) &= \frac{\pi}{4} r^2 \Leftrightarrow \\ \frac{\pi}{2} - x - \sin x \cos x &= \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \\ x + \sin x \cos x &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$