

R2 - Kapittel 1: Vektorer

Kompetansenivåer: L(avt), M(iddels), H(øyt)

Løsningsskisser

Vanlige feil og tips:

- Korrekt og konsekvent avrunding:
 - Teoretiske oppgaver: Eksakte tall eller 3 gjeldende siffer.
 - Praktiske oppgaver: Samme antall gjeldende siffer som i oppgaveteksten.
- Tren på å regne eksakt så lenge som mulig, viktig å regne fort og riktig!
 - Også viktig for å få øye på forenklinger og snarveier!
- Tenk hele tiden! Løpende vurdering og kontroll av svar til slutt!
- Forståelse, oversikt og algebraferdigheter er det som gir resultater!
- Fokuser på å huske figurer, poenger og sammenhenger, ikke bare formler.
(Formler verdiløse hvis man ikke forstår hvordan de skal brukes, og hva som skal settes inn i dem...)

I (L)

Gitt vektorene $\vec{u} = [1, 1, 3]$, $\vec{v} = [2, 3, 2]$ og $\vec{w} = [7, 5, 6]$

Regn ut:

- a) $\vec{u} - \vec{v}$ b) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ c) $\vec{u} \times \vec{v}$ d) Prosjeksjonen av \vec{v} på \vec{u} .
 e) Arealet av parallelogrammet utspent av \vec{u} og \vec{v} .
 f) Volumet av parallelepipedet utspent av \vec{u} , \vec{v} og \vec{w} .
 g) Enhetsvektor parallell med \vec{u} .

$$\text{a) } \vec{u} - \vec{v} = [1, 1, 3] - [2, 3, 2] = [-1, -2, 1]$$

$$\text{b) } \vec{u} \cdot \vec{v} = [1, 1, 3] \cdot [2, 3, 2] = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 11$$

$$\text{c) } \vec{u} \times \vec{v} = [1, 1, 3] \times [2, 3, 2] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = [-7, 4, 1]$$

$$\text{d) } \vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{11}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}} = \frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11} \approx 3.32$$

$$\text{e) } A = |\vec{u} \times \vec{v}| = |[-7, 4, 1]| = \sqrt{7^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{66} \approx 8.12$$

$$\text{(Eventuelt: } |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2} = \sqrt{11 \cdot 17 - 11^2} = \sqrt{66})$$

$$\text{f) } V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| = |[-7, 4, 1] \cdot [7, 5, 6]| = |-7 \cdot 7 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 6| = 23$$

$$\text{g) } \vec{e} = \frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{11}} [1, 1, 3] = \left[\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}} \right] \approx [0.302, 0.302, 0.905]$$

II (LM)

Gitt punktene $A(0, 0, 0)$, $B(6, 2, 3)$, $C(4, 4, 2)$ og $D(1, 2, 10)$.

- Finn ligningen for et plan α gjennom A, B og C .
- Finn en parameterfremstilling for planet α .
- Hva er vinkelen mellom en linje l gjennom A og D og planet α ?
- Hva er avstanden fra punktet D til planet α ?
- Hva er avstanden mellom linjen l og en linje m gjennom B og C ?

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{AB} &= [6, 2, 3], & \vec{AC} &= [4, 4, 2] \\ \text{Normalvektor til } \alpha: & \vec{AB} \times \vec{AC} = [6, 2, 3] \times [4, 4, 2] = [-8, 0, 16] = -8[1, 0, -2] \\ \text{Velger: } & \vec{n} = [1, 0, -2] \\ \alpha: & [x - 0, y - 0, z - 0] \cdot [1, 0, -2] = 0 \Leftrightarrow x - 2z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) En mulighet: } & [x, y, z] = \vec{OA} + s\vec{AB} + t\vec{AC} \Leftrightarrow \\ & [x, y, z] = [0, 0, 0] + s[6, 2, 3] + t[4, 4, 2] \Leftrightarrow \\ \alpha: & \left\{ \begin{array}{l} x = 6s + 4t \\ y = 2s + 4t \\ z = 3s + 2t \end{array} \right. \end{aligned}$$

Men som alltid, REMA 1000 anbefalingen er å foretrekke:

$$\text{Bruker ligningen: } x - 2z = 0$$

og velger:

$$\begin{aligned} y &= s & (\text{Ligningen viser at } y \text{ kan variere fritt!}) \\ z &= t & (\text{Ligningen gir da } x = 2z = 2t!) \end{aligned}$$

og får:

$$\alpha: \left\{ \begin{array}{l} x = 2t \\ y = s \\ z = t \end{array} \right.$$

(Et eksempel til:

Har vi ligningen til et plan som $2x + y - 3z - 5 = 0$,
kan vi velge to av variablene som parametere, eksempelvis:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = s \\ y = 5 - 2s + 3t \\ z = t \end{array} \right.)$$

c) Retningsvektor for linjen l : $\vec{r}_l = \vec{AD} = [1, 2, 10]$

Normalvinkel planet α : $\vec{n} = [1, 0, -2]$

$$\cos \phi = \frac{\vec{AD} \cdot \vec{n}}{|\vec{AD}| |\vec{n}|} = \frac{[1, 2, 10] \cdot [1, 0, -2]}{\sqrt{105} \sqrt{5}} = -\frac{19}{\sqrt{21} \sqrt{5} \sqrt{5}} = -\frac{19}{5\sqrt{21}} \approx -0.82923$$

$$\phi = 146^\circ$$

Vinkelen vi ønsker: $146^\circ - 90^\circ = 56^\circ$

$$\text{d) Avstand: } a = \left| \frac{\vec{AD} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{[1, 2, 10] \cdot [1, 0, -2]}{\sqrt{5}} \right| = \frac{19}{\sqrt{5}} \approx 8.50$$

e) Vindskjeve linjer:

$$\begin{aligned} \text{Retningsvektorer: } \vec{r}_l &= \overrightarrow{AD} = [1, 2, 10] \\ \vec{r}_m &= \overrightarrow{BC} = [-2, 2, -1] \end{aligned}$$

Normalvektor på begge linjene:

$$\vec{n} = \vec{r}_l \times \vec{r}_m = [1, 2, 10] \times [-2, 2, -1] = [-22, -19, 6]$$

$$\text{Vektor fra et punkt på } l \text{ til punkt på } m: \quad \overrightarrow{AB} = [6, 2, 3]$$

$$\text{Avstand som projeksjon: } b = \left| \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{[6, 2, 3] \cdot [-22, -19, 6]}{\sqrt{22^2 + 19^2 + 6^2}} \right| = \frac{152}{\sqrt{881}} \approx 5.12$$

III (M)

En kuleflate har ligningen $x^2 - 6x + y^2 + z^2 = 0$.

a) Finn sentrum S og radien R i kuleflaten.

b) Finn skjæringspunktene A og B mellom kuleflaten og linjen gitt ved parameterfremstillingen

$$l : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases}$$

c) Finn ligningene for planene som tangerer kuleflaten i punktene A og B .

d) Hva er radien r i skjærings sirkelen mellom kuleflaten og et plan som har avstanden 1 fra S ?

$$\begin{aligned} \text{a) Omformer: } x^2 - 6x + 3^2 + y^2 + z^2 = 3^2 &\Leftrightarrow (x - 3)^2 + y^2 + z^2 = 3^2 \\ \text{): Radius: } R = 3 \quad \text{Sentrum: } S = (3, 0, 0) \end{aligned}$$

b) Må oppfylle alle ligninger:

$$(3 + t - 3)^2 + (2t)^2 + (2t)^2 = 3^2 \Leftrightarrow t^2 + 4t^2 + 4t^2 = 3^2 \Leftrightarrow 9t^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 1$$

$$t = -1 :$$

$$A = (3 - 1, 2(-1), 2(-1)) = (2, -2, -2)$$

$$t = 1 :$$

$$B = (3 + 1, 2, 2) = (4, 2, 2)$$

c)

Vi ser at parameterfremstillingen kan skrives: $[x, y, z] = [3, 0, 0] + t[1, 2, 2]$

Vi ser at både A og B ligger i avstanden 3 fra S , altså er AB diameter i kuleflaten!

De parallelle tangentplanene har derfor begge $\vec{n} = [1, 2, 2]$ som normalvektor.

(Hvis vi ikke ser dette, oppdager vi det når vi lager vektorene $\overrightarrow{SA} = [-1, -2, -2]$

og $\overrightarrow{SB} = [1, 2, 2]$ som normalvektorer til hvert av de to tangentplanene!)

Plan gjennom A :

$$[x - 2, y + 2, z + 2] \cdot [1, 2, 2] = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z + 6 = 0$$

Plan gjennom B :

$$[x - 4, y - 2, z - 2] \cdot [1, 2, 2] = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 12 = 0$$

d)

Figur viser at vi kan bruke Pythagoras: $r^2 + 1^2 = R^2 \Leftrightarrow$

$$r = \sqrt{R^2 - 1} = \sqrt{3^2 - 1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.83$$

IV (MH)

- a) Forklar hvordan du kan avgjøre om tre punkter A , B og C ligger på linje. Tre plan har normalvektorene \vec{n}_α , \vec{n}_β , og \vec{n}_γ .
- b) Forklar hvordan du kan avgjøre om planene er parallelle.
- c) Forklar hvordan du kan avgjøre om planene har et felles skjæringspunkt.
- d) Forklar hvordan du kan avgjøre om fire punkter A , B , C og D ligger i samme plan.

a)

Lager \vec{AB} og \vec{AC} (eksempelvis), og sjekker om $\vec{AB} \times \vec{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AB} \parallel \vec{AC}$

b)

Hvis planene er parallelle, må også normalvektorene være det: $\vec{n}_\alpha \parallel \vec{n}_\beta \parallel \vec{n}_\gamma$.

Sjekker om dette er tilfelle med: $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \vec{0} \wedge \vec{n}_\beta \times \vec{n}_\gamma = \vec{0}$

c)

To av planene må ha en skjæringslinje l med retningsvektor $\vec{r}_l = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$.

Det tredje planet må skjære l og ikke inneholde l , så det tredje planet kan ikke stå normalt på \vec{r}_l : $\vec{r}_l \cdot \vec{n}_\gamma \neq 0 \Leftrightarrow (\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta) \cdot \vec{n}_\gamma \neq 0$

d)

Hvis de ikke ligger i samme plan vil \vec{AB}, \vec{AC} og \vec{AD} spenne ut et parallelepiped med volum: $V = |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}|$

Hvis de ligger i samme plan vil parallelepipedet klappe sammen og volumet blir 0, så punktene ligger i samme plan hvis $(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 0$

V(H)

Vi har gitt to vektorer $\vec{u} = [1, 2, 2]$ og $\vec{v} = [2, 3, 4]$.

a) Finn vektoren $\vec{w} = \vec{u} + |\vec{u}| \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}$.

b) Vis at \vec{w} halverer vinkelen mellom \vec{u} og \vec{v} .

c) Bevis at $\vec{w} = \vec{u} + |\vec{u}| \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}$ alltid halverer vinkelen mellom \vec{u} og \vec{v} .

(Tips: Diagonalene i en rombe halverer vinklene i hjørnene de går igjennom.)

a)

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

$$\vec{w} = \vec{u} + |\vec{u}| \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v} = [1, 2, 2] + 3 \frac{1}{\sqrt{29}} [2, 3, 4] = [1 + \frac{6}{\sqrt{29}}, 2 + \frac{9}{\sqrt{29}}, 2 + \frac{12}{\sqrt{29}}] \\ \approx [2.11, 3.67, 4.23]$$

b)

$$|\vec{w}| = \sqrt{(1 + \frac{6}{\sqrt{29}})^2 + (2 + \frac{9}{\sqrt{29}})^2 + (2 + \frac{12}{\sqrt{29}})^2} = \sqrt{\frac{96}{\sqrt{29}} + 18}$$

$$\cos(\angle \vec{u}, \vec{w}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| |\vec{w}|} = \frac{[1, 2, 2] \cdot [1 + \frac{6}{\sqrt{29}}, 2 + \frac{9}{\sqrt{29}}, 2 + \frac{12}{\sqrt{29}}]}{3 \cdot \sqrt{\frac{96}{\sqrt{29}} + 18}} \approx 0.99759$$

$$\angle \vec{u}, \vec{w} \approx 8.83^\circ$$

$$\cos(\angle \vec{w}, \vec{v}) = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{|\vec{w}| |\vec{v}|} = \frac{[1 + \frac{6}{\sqrt{29}}, 2 + \frac{9}{\sqrt{29}}, 2 + \frac{12}{\sqrt{29}}] \cdot [2, 3, 4]}{\sqrt{29} \sqrt{\frac{96}{\sqrt{29}} + 18}} \approx 0.99759$$

$$\angle \vec{w}, \vec{v} \approx 8.83^\circ$$

Strengt tatt har vi ikke vist at den halverer *noyaktig*, men det blir mye tidsbruk på algebra hvis vi skal vise at cosinus-verdiene blir eksakt like...
 Dessuten viser vi det jo generelt i c) :-)

Vi *kunne* ha gjort:

$$\begin{aligned} \cos(\angle \vec{u}, \vec{w}) &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| |\vec{w}|} = \frac{\vec{u} \cdot (\vec{u} + |\vec{u}| \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v})}{|\vec{u}| |\vec{w}|} = \frac{|\vec{u}|^2 + |\vec{u}| \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{w}|} = \frac{|\vec{u}| + \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{w}|} \\ \cos(\angle \vec{w}, \vec{v}) &= \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{|\vec{w}| |\vec{v}|} = \frac{(\vec{u} + |\vec{u}| \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}) \cdot \vec{v}}{|\vec{w}| |\vec{v}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{u}| \frac{1}{|\vec{v}|} |\vec{v}|^2}{|\vec{w}| |\vec{v}|} = \frac{\frac{1}{|\vec{v}|} \vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{u}|}{|\vec{w}|} \end{aligned}$$

$$\cos(\angle \vec{u}, \vec{w}) = \cos(\angle \vec{w}, \vec{v}), \text{ så } \angle \vec{u}, \vec{w}) = \angle \vec{w}, \vec{v}), \quad QED$$

Dette er da også en løsning av c), da vi ikke har forutsatt noe om \vec{u} og \vec{v} !

Men, legg merke til hvor mye enklere beviset i c) går med enhetsvektorer:

c)

Spanner ut romben med \vec{u} og en

vektor med *samme* lengde som \vec{u} , parallell med \vec{v} : $|\vec{u}| \vec{e} = |\vec{u}| \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}$

Da blir diagonalen i romben summen: $\vec{w} = \vec{u} + |\vec{u}| \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}$

Da diagonalene i romben halverer hjørnene de går gjennom har vi bevist at \vec{w} halverer $\angle \vec{u}, \vec{v}$.