

## R2 - Kapittel 1.1 - 1.3 - 12.09.12

### Løsningskisser

#### I

Gitt punktene  $A(2, 1, 3)$  og  $B(5, -2, 4)$ .

a) Finn vektor  $\overrightarrow{AB}$ .

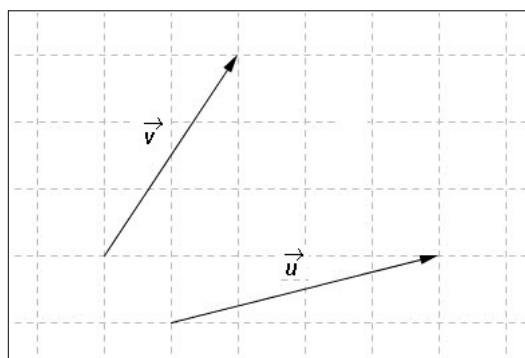
b) Finn lengden av vektor  $\overrightarrow{AB}$ .

$$\text{a) } \overrightarrow{AB} = [5 - 2, -2 - 1, 4 - 3] = [3, -3, 1]$$

$$\text{b) } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{19} \approx 4.36$$

#### II

Gitt vektorene  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  i rutenettet under:



Figur 1

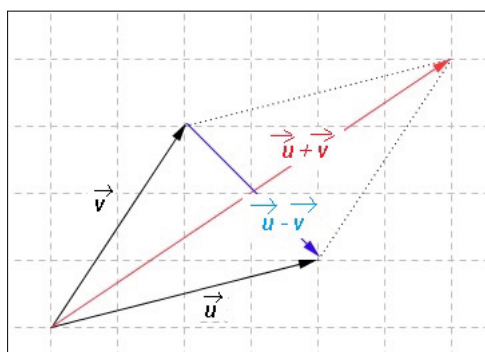
a) Tegn vektorene inn i figuren:

$$\text{i) } \vec{u} + \vec{v} \quad \text{ii) } \vec{u} - \vec{v} \quad \text{iii) } -\frac{1}{2}\vec{u}$$

b) Regn også ut vektorene i i), ii) og iii) på koordinatform.

c) Finn  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

a) For eksempel:



b) i)  $\vec{u} + \vec{v} = [4, 1] + [2, 3] = [6, 4]$     ii)  $\vec{u} - \vec{v} = [4, 1] - [2, 3] = [2, -2]$   
 iii)  $-\frac{1}{2}[4, 1] = [-2, -\frac{1}{2}]$

c)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = [4, 1] \cdot [2, 3] = 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 11$

### III

Gitt vektorene  $\vec{u} = [2, 1, 3]$  og  $\vec{v} = [-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}]$   
 Undersøk om  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ . (Parallelle.)

$$\begin{aligned} \vec{u} \parallel \vec{v} &\Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow [2, 1, 3] = k[-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}] \Leftrightarrow \\ 2 &= -\sqrt{2}k \wedge 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}k \wedge 3 = -\frac{3}{2}\sqrt{2}k \Leftrightarrow \\ k &= -\frac{2}{\sqrt{2}} \wedge k = -\frac{2}{\sqrt{2}} \wedge k = -\frac{3 \cdot 2}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

): Vektorene er parallelle.

### IV

Gitt vektorene  $\vec{u} = [3, 1, 2]$  og  $\vec{v} = [2, -1, 5]$ .

Regn ut:

- $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .
- Vinkelen mellom  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$ .
- Projeksjonen av  $\vec{u}$  på  $\vec{v}$  som tall.
- Projeksjonen av  $\vec{u}$  på  $\vec{v}$  som vektor.
- $\vec{u} \times \vec{v}$ .
- Arealet utspent av  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$ .

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = [3, 1, 2] \cdot [2, -1, 5] = 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 = 15$

b)  $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{15}{\sqrt{3^2+1^2+2^2} \sqrt{2^2+1^2+5^2}} = \frac{15}{\sqrt{14} \sqrt{30}} \approx 0.73193$   
 $\alpha \approx 43^\circ$

c)  $p = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{15}{\sqrt{30}}$     d)  $\vec{p} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} = \frac{15}{\sqrt{30}^2} [2, -1, 5] = [1, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$

e)  $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = [7, -11, -5]$

f)  $A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{7^2 + 11^2 + 5^2} = \sqrt{195} \approx 14.0$

(Eventuelt:  $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2} = \sqrt{14 \cdot 30 - 15^2} = \sqrt{420 - 225} = \sqrt{195}$  )

### V

En rett linje  $l$  har parameterfremstillingen  $l : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{array} \right\}$

Finn skjæringspunktet mellom linjen  $l$  og  $xy$ -planet.

$$\begin{aligned} xy\text{-plan: } z = 0 &\Leftrightarrow 3 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{2} \\ x &= 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \\ y &= 2 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2} \\ \text{): } S &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 0\right) \end{aligned}$$

## VI

Et plan  $\alpha$  har parameterfremstillingen  $\alpha : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2s + t \\ y = 3 - s - t \\ z = 2 + s + 2t \end{array} \right\}$

Finn skjæringspunktet mellom planet  $\alpha$  og  $z$ -aksen.

$$\begin{aligned} z\text{-akse: } x = y = 0 &\Leftrightarrow 1 + 2s + t = 0 \wedge 3 - s - t = 0 \Leftrightarrow \\ &t = 7 \wedge s = -4 \\ x &= 2 - 4 + 2 \cdot 7 = 12 \\ \text{): } S &= (0, 0, 12) \end{aligned}$$

## VII

Finn volumet av parallelepipedet utspent av  $\vec{u} = [1, 1, 4]$ ,  $\vec{v} = [2, 2, 1]$  og  $\vec{w} = [4, 2, 3]$ .

$$\begin{aligned} (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot [4, 2, 3] = [-7, 7, 0] \cdot [4, 2, 3] = \\ -28 + 14 + 0 &= -14 \end{aligned}$$

$$V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| = 14$$

## VIII

Forklar hvordan du kan sjekke om fire punkter  $A, B, C$  og  $D$  ligger i samme plan.

Vi kan lage vektorene  $\vec{AB}, \vec{AC}$  og  $\vec{AD}$ .

Hvis punktene ligger i samme plan, må også de tre vektorene vi har laget ligge i samme plan.

Da må parallelepipedet de spenner ut være helt flatt og ha volumet 0, så vi har:

$$A, B, C \text{ og } D \text{ i samme plan} \Leftrightarrow (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 0$$